

Thèse de doctorat de l'École Nationale des Ponts et Chaussées

Spécialité: **MATHÉMATIQUES, INFORMATIQUE**

Présentée par ZHANG Ruotao

Pour obtenir le grade de Docteur de l'École Nationale des Ponts et
Chaussées

Sujet de la thèse:

Couverture Approchée des Options Européennes

Soutenue le 8 janvier 1999 devant le jury composé de:

Mme Laure Elie
Mme Agnès Sulem
Mr Damien Lamberton
Mr Bernard Lapeyre
Mr Denis Talay

Table des matières

Résumé	5
Introduction	7
1 Modèle et Notions fondamentales	9
1.1 Le modèle d'actifs	9
1.2 Stratégie autofinancée	10
1.3 Rappel sur le problème de Cauchy	13
1.4 Prix et couvertures des options : le cas markovien	15
1.4.1 Calcul du prix	15
1.4.2 Calcul de la couverture	17
1.4.3 Couvertures approchées d'options européennes	18
2 Couverture Approchée en dimension 1	21
2.1 Énoncés des résultats pour les couvertures approchées élémentaire et optimale	22
2.2 Démonstrations	24
2.2.1 Un ensemble de processus, l'espace \mathcal{M}^2	24
2.2.2 Une évaluation formelle	28
2.2.3 Un lemme d'analyse	36
2.2.4 Quelques propriétés de H_t	44
2.2.5 Démonstration du théorème 2.1.2	66
2.2.6 Démonstration du théorème 2.1.4	67
2.3 Modèle Black-Scholes	75
2.3.1 Un calcul explicite dans le modèle de Black et Scholes	75
2.4 Risque Résiduel Sous la Probabilité Initiale	79
2.5 Coût de transaction	88
3 Couverture Approchée Multi-dimensionnelle	97
3.1 Modèle général	97
3.2 Le cas f est régulière	103
3.3 Modèle avec volatilité déterministe	107

3.4	Couverture avec une partie des actifs sous-jacents	111
3.5	Exemple	113

Résumé

Cette thèse est consacrée à l'étude de la couverture à temps discret des options européennes. On a étudié la convergence du risque résiduel et sa vitesse de convergence sous la probabilité risque neutre ou la probabilité initiale. Pour cela, une condition générale est donnée, vérifiée par beaucoup d'actifs contingents dont Call et Put, sous laquelle on a la vitesse de convergence du risque quadratique. On a étudié également la couverture dans le cadre multi-dimensionnel, où les résultats sont un peu moins généraux, mais suffisants pour la version multi-dimensionnelle du modèle Black-Scholes.

On a comparé deux sortes de couvertures approchées, la couverture basée sur la formule de couverture exacte et la couverture qui minimise le risque quadratique. Le résultat montre qu'elles sont asymptotiquement équivalentes.

Introduction

Un contrat d'*option* consiste en l'échange d'un flux aléatoire $h(\omega)$ à l'instant T fixé contre une somme déterministe à l'instant 0 appelée la *prime*. Les intervenants financiers s'intéressent souvent, plus qu'à la prime, à l'existence d'une *stratégie de couverture sans risques*. La théorie classique du pricing d'options dans le modèle de Black et Scholes.

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

repose sur l'existence d'un portefeuille autofinancé qui réplique exactement ce que promet l'option (voir [BS73] et [Mer73] pour l'approche classique et [HP81], [HP83], [HK79] ... pour l'approche martingale). Dans le modèle de Black et Scholes, le prix à l'instant t d'une option promettant $f(S_T)$ en T est donné par une fonction $F(t, S_t)$ et l'on peut montrer que le portefeuille autofinancé, comportant à l'instant t , une quantité H_t d'actif de prix S_t avec :

$$H_t = \frac{\partial F(t, S_t)}{\partial x},$$

permet de couvrir exactement l'option et donc d'établir un prix légitime pour l'option. Ce phénomène se généralise au cas de tout marché viable et complet.

On constate, sur la formule donnant H_t , que la mise en œuvre de cette stratégie de couverture est, bien entendu, impossible pratiquement puisqu'elle impose à l'opérateur d'intervenir à tout moment sur le marché et que les coûts de transaction limitent cette fréquence d'intervention. De nombreuses études ont porté sur la prise en compte des coûts de transaction dans le modèle de Black et Scholes ([Lel85], [Wha95], [BLPS92], [BS96], [BV92], [MT95],...). Ces recherches n'ont, semble-t-il, pas eu d'applications opérationnelles dans les salles de marché : elles sont délicates à mettre en œuvre et à calibrer.

Notre point de vue est ici moins ambitieux : nous cherchons à estimer une fréquence d'intervention raisonnable en cherchant à évaluer le risque quadratique de couverture en fonction de la fréquence d'intervention. Pour des raisons pratiques (la plupart des options existantes sont de ce type) et théoriques (on ne peut mener d'analyse précise que dans ce cadre) nous nous sommes limités à des payoff de type markovien et nous ne considérons qu'une légère généralisation du modèle de Black et Scholes en autorisant des volatilités dépendant de l'actif (lorsque σ est minoré on a alors affaire à un marché viable et complet). Dans ce cadre, nous avons étudié des stratégies de couvertures plus

réalistes (interventions espacées d'un pas de temps fixe h) de façon rigoureuse. Nous avons cherché à obtenir un équivalent lorsque le pas de couverture h tend vers 0 de la variance résiduelle de couverture. Ce type de résultat a été obtenu dans un cadre réaliste (c'est à dire pour une classe de fonctions peu régulières incluant les puts et les calls) en dimension 1 pour la couverture parfaite (de Black et Scholes) appliquée en des instants régulièrement espacés et pour une stratégie optimale (au sens L^2 sous la probabilité risque neutre) toujours en des instants réguliers. Un résultat intéressant de la thèse est de constater que le comportement asymptotique des variances résiduelles des deux méthodes de couverture est alors identique. On obtient des résultats proches en dimension supérieure, mais il n'ont été établis dans cette thèse que dans le cas de fonctions régulières et pour le modèle de Black-Scholes multidimensionnel pour des fonctions réalistes.

Les formules obtenues sont souvent connues dans la littérature financière, au moins pour la couverture Black et Scholes (c'est ce genre de formule qui justifie l'utilisation du Gamma comme paramètre pertinent pour la gestion de portefeuille). Cependant nous ne connaissons pas de preuve rigoureuse de ces résultats. Les résultats pour la couverture optimale sont à notre connaissance nouveaux ainsi que l'extension sous la probabilité initiale (même si elle ne constitue pas une surprise).

La thèse est organisée de la façon suivante. Dans le *premier chapitre* nous rappelons les résultats classiques de finance et de théorie des processus stochastiques utiles dans notre développement. En particulier nous rappelons les résultats de couvertures parfaites pour des actifs contingents markoviens. Le *deuxième chapitre* constitue l'essentiel de cette thèse. Nous y établissons un développement asymptotique, sous la probabilité risque neutre, du risque résiduel de la stratégie de couverture "Black et Scholes" et "optimale" en dimension 1 (théorème 2.1.2 et 2.1.4) pour une fonction absolument continue. Nous illustrons ces résultats dans le cas classique du modèle de Black et Scholes pour lequel des formules explicites sont connues. Nous étendons, alors, ces résultats sous la probabilité historique et précisons le comportement de l'espérance des coûts de transaction. Le *chapitre 3* est consacré à l'extension des résultats précédents en dimension supérieure à 1, pour des fonctions régulières et dans le cas du modèle de Black et Scholes pour les puts et les calls. Un exemple de traitement d'un option d'échange est donné.

Chapitre 1

Modèle et Notions fondamentales

Le but de ce chapitre est de présenter le modèle qui servira de base à notre étude et de rappeler les notions élémentaires de la théorie des options et de la couverture.

1.1 Le modèle d'actifs

Nous supposons qu'il existe sur le marché financier $d + 1$ actifs élémentaires, un actif sans risque de prix X_t^0 et d actifs risqués de prix $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^d)$.

Nous construisons le modèle pour ces actifs à partir d'un mouvement brownien d -dimensionnel $(W_t)_{t \geq 0}$. Nous notons $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ sa filtration naturelle complétée. On considère T un réel positif (qui représentera l'échéance de l'option) et l'on se donne des fonctions $\mu_i(t, x)$ et $\sigma_{ij}(t, x)$, $1 \leq i, j \leq d$, que l'on supposera de classe $C^{1,\infty}([0, T] \times \mathbf{R}^d)$, uniformément bornées et uniformément lipschitziennes. On suppose, de plus, que σ est uniformément elliptique, plus précisément nous ferons comme hypothèse qu'il existe γ et η strictement positifs tel que, pour tout $\xi \in \mathbf{R}^d$ et pour tout $t \in [0, T]$ et $x \in \mathbf{R}^d$ on ait :

$$\eta \|\xi\| \leq \|\sigma(t, x)\xi\| \leq \gamma \|\xi\|. \quad (1.1)$$

Les processus $(X_t^i, t \geq 0)$ sont les solutions uniques du système :

$$\begin{cases} \frac{dX_t^0}{X_t^0} = r dt \\ \frac{dX_t^i}{X_t^i} = \mu_i(t, X_t) dt + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}(t, X_t) dW_t^j, \quad i = 1, d. \end{cases} \quad (1.2)$$

Comme σ est une matrice elliptique, on peut utiliser le théorème de Girsanov pour montrer qu'il existe une unique probabilité équivalente à la probabilité initiale \mathbf{P} , $\tilde{\mathbf{P}}$ sous laquelle :

$$\tilde{W}_t = W_t - \int_0^t \sigma(u, X_u)^{-1} (rI - \mu(u, X_u)) du$$

est un $\tilde{\mathbf{P}}$ -mouvement Brownien. On appelle cette probabilité $\tilde{\mathbf{P}}$, la probabilité *risque neutre*.

Par commodité de notation nous continuerons à noter le nouveau mouvement Brownien W_t au lieu de \tilde{W}_t . Avec cette convention, les prix X_t^i , $i = 0..d$, satisfont l'équation différentielle stochastique :

$$\begin{cases} \frac{dX_t^0}{X_t^0} = rdt \\ \frac{dX_t^i}{X_t^i} = rdt + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}(t, X_t) dW_t^j, \quad i = 1, d. \end{cases} \quad (1.3)$$

On notera la valeur actualisée des actifs \tilde{X}_t^i par :

$$\tilde{X}_t^i = e^{-rt} X_t^i.$$

Remarquons que sous la probabilité $\tilde{\mathbf{P}}$, il est facile de vérifier que les valeurs actualisées des actifs $(\tilde{X}_t^i, 0 \leq t \leq T)$ sont des martingales par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq T)$, et

$$\frac{d\tilde{X}_t^i}{\tilde{X}_t^i} = \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}(t, X_t) dW_t^j, \quad i = 1, d. \quad (1.4)$$

1.2 Stratégie autofinancée

Nous allons maintenant définir les stratégies de gestion de portefeuilles qui nous seront utiles dans la suite.

Définition 1.2.1 *On appelle une stratégie de gestion de portefeuille un processus pré-visible :*

$$\phi = (\phi_t^0, \dots, \phi_t^d)_{t \geq 0}$$

à valeur dans \mathbf{R}^{d+1} . ϕ_t^i représente la quantité du $i^{\text{ème}}$ actif.

La valeur du portefeuille correspondant à cette stratégie de gestion est donnée par :

$$V_t(\phi) = \sum_{i=0}^d \phi_t^i X_t^i.$$

Définition 1.2.2 *Une stratégie est dite autofinancée si on a :*

$$\int_0^T |\phi_t^0| dt + \sum_{i=1}^d \int_0^T |\phi_t^i|^2 dt < \infty p.s.,$$

et :

$$V_t = V_0 + \sum_{i=0}^d \int_0^t \phi_u^i dX_u^i, \forall t \in [0, T].$$

Remarque 1.2.3 La première condition est une condition technique qui permet de donner un sens aux intégrales stochastiques $\int_0^T \phi_t^i dX_t^i$, en utilisant le fait que les $\sigma_{ij}(t, x)$ sont bornées.

La deuxième condition représente la notion intuitive d'autofinancement. Cela signifie que le portefeuille une fois constitué, est géré sans retirer, ni emprunter d'argent.

On a alors le lemme suivant qui exprime que la valeur (actualisée) d'une stratégie de gestion autofinancée est déterminée par sa valeur initiale et les processus des quantités des actifs risqués.

Lemme 1.2.4 Soit $\tilde{V}_t(\phi)$ la valeur actualisée d'une stratégie de gestion autofinancée:

$$\tilde{V}_t(\phi) = V_t(\phi)/X_t^0 = e^{-rt}V_t(\phi).$$

Alors $\tilde{V}_t(\phi)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\tilde{V}_t(\phi) = V_0 + \sum_{i=1}^d \int_0^t \phi_s^i d\tilde{X}_s^i.$$

Démonstration : Il n'y a qu'à appliquer la formule d'Ito et la définition de l'autofinancement pour vérifier cette égalité. ■

On appelle un *actif contingent* une variable aléatoire positive h qui est \mathcal{F}_T mesurable. Dans la suite de ce travail nous ne considérerons que des actifs contingents h de carré intégrable, sous la probabilité risque neutre. On parlera dans ce cas de *L^2 -actif contingent*.

Nous introduisons, maintenant, une notion de stratégie admissible adaptée à ce contexte.

Définition 1.2.5 Une stratégie $(\phi_t, 0 \leq t \leq T)$ est une stratégie L^2 -admissible si elle est autofinancée, telle que sa valeur $V_t(\phi) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et telle que $\tilde{\mathbb{E}}(\sup_{0 \leq t \leq T} V_t^2(\phi)) < +\infty$.

Remarque 1.2.6 Cette définition a l'avantage d'impliquer que, si ϕ est une stratégie admissible, alors $(\tilde{V}_t(\phi), 0 \leq t \leq T)$ est une martingale sous la probabilité risque neutre en utilisant lemme 1.2.4.

Un L^2 -actif contingent h est dit *L^2 -simulable* s'il existe une stratégie L^2 -admissible dont la valeur à l'instant T est h .

Définition 1.2.7 Un marché est dit viable s'il existe une probabilité sous laquelle les prix actualisés des actifs élémentaires sont des martingales.

Nous avons vu plus haut que le marché que nous avons considéré est viable.

Définition 1.2.8 *Un marché est dit complet si tout L^2 -actif contingent est L^2 -simulable.*

Le résultat suivant est classique:

Proposition 1.2.9 *Sous le modèle 1.1 le marché est complet.*

Démonstration : Pour tout L^2 -actif contingent h , on a $\tilde{V}_t = \tilde{\mathbf{E}}(e^{-rT}h|\mathcal{F}_t)$ est une L^2 -martingale sous $\tilde{\mathbf{P}}$, alors par le théorème de représentation des martingales dans L^2 , il existe processus prévisible $\{\phi_t^i\}_{t \geq 0, i=1..d}$ tel que

$$\tilde{\mathbf{E}} \int_0^T (\phi_s^i)^2 ds < \infty, \forall i = 1..d,$$

$$\tilde{V}_t = V_0 + \sum_{i=1}^d \int_0^t \phi_s^i dW_s^i = V_0 + \int_0^t \phi_s^* dW_s, \forall t \geq 0,$$

et tel que $\forall i, \phi_t^i$ est dans $L^2([0, T] \times \Omega)$. D'autre part, par (1.4) et par l'ellipticité de σ , on peut inverser σ et écrire

$$dW_t = \sigma(t, X_t)^{-1} I_{\tilde{X}_t}^{-1} d\tilde{X}_t,$$

où

$$I_x = \begin{pmatrix} x_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & x_d \end{pmatrix}, \text{ si } x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbf{R}^d.$$

Donc on peut écrire

$$\tilde{V}_t = V_0 + \int_0^t \phi_s^* \sigma(s, X_s)^{-1} I_{\tilde{X}_s}^{-1} d\tilde{X}_s,$$

et par lemme 1.2.4, ceci prouve l'existence d'une stratégie admissible dont le prix actualisé est \tilde{V}_t , qui simule h à l'instant T . Donc h est L^2 -simulable. Le marché est complet puisque le L^2 -actif contingent h est arbitraire. ■

1.3 Rappel sur le problème de Cauchy

Dans cette partie nous rappelons certains résultats classiques qui relient les équations paraboliques et les processus de diffusions.

Soit $(X_t, t \geq 0)$ un processus de diffusion dans \mathbf{R}^d , solution de :

$$dX_t^i = b_i(t, X_t)dt + \sum_{j=1}^p \sigma_{ij}(t, X_t)dW_t^j,$$

pour $i = 1, \dots, d$, avec $(W_t, t \geq 0)$ un brownien p -dimensionnel et $b_i(t, x)$ et $\sigma_{ij}(t, x)$ des fonctions à valeurs réelles données. On associe classiquement à ce processus une famille d'opérateurs du second ordre, en posant :

$$A_t = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(t, x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i(t, x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

avec :

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^p \sigma_{i,k}(t, x) \sigma_{j,k}(t, x).$$

Nous allons voir que sous des hypothèses d'ellipticité et si f est une fonction continue à croissance au plus exponentielle :

$$u(t, x) = \mathbf{E}f(X_T^{t,x}),$$

est solution du *problème de Cauchy* suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + A_t u &= 0 & \text{pour } t \in [0, T[, \\ u(T, x) &= f(x). \end{cases} \quad (1.5)$$

Pour cela nous aurons besoin des définitions suivantes :

Définition 1.3.1 *L'opérateur :*

$$Mu = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{i,j}(t, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(t, x)u$$

est parabolique $\forall \xi \in \mathbf{R}^d$, on a $\sum_{i,j} a_{i,j}(t, x) \xi_i \xi_j > 0$. M est uniformément parabolique si il existe une constante positive η tel que

$$\sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(t, x) \xi_i \xi_j \geq \eta |\xi|^2, \text{ pour tout } (t, x) \in [0, T] \times \mathbf{R}^d, \xi \in \mathbf{R}^d.$$

Définition 1.3.2 Une solution fondamentale de l'opérateur parabolique M dans $[0, T] \times \mathbf{R}^d$ est une fonction $p(t, s; x, y)$ défini pour tout $(t, x), (s, y) \in [0, T] \times \mathbf{R}^d, t < s$, satisfaisant la condition suivante :

Pour toute fonction continue f à support compact, la fonction :

$$u(t, x) = \int_{\mathbf{R}^d} p(t, s; x, y) f(y) dy$$

satisfait :

$$\begin{aligned} Mu &= 0 \text{ pour } x \in \mathbf{R}^d, 0 \leq t < s \leq T, \\ u(t, x) &\rightarrow f(x) \text{ si } t \uparrow s. \end{aligned}$$

Nous avons besoin des conditions suivantes pour assurer l'existence de la solution fondamentale (Voir Friedman [Fri76]) :

- (A1) M est uniformément parabolique.
- (A2) Les coefficients de M sont continus et bornés dans $[0, T] \times \mathbf{R}^d$, les $a_{ij}(t, x)$ sont continues en t , uniformément par rapport à (t, x) dans $[0, T] \times \mathbf{R}^d$.
- (A3) Les coefficients de M sont Hölderiens en x , uniformément par rapport à (t, x) dans tout compact de $[0, T] \times \mathbf{R}^d$; et les $a_{i,j}(t, x)$ sont Hölderiens continus en x uniformément par rapport à (t, x) dans $[0, T] \times \mathbf{R}^d$.

On a alors le théorème suivant (voir Friedman (64), chapitre 9).

Théorème 1.3.3 Si l'opérateur M vérifie (A1) – (A3), alors :

- (i) il existe une solution fondamentale $p(t, s; x, y)$ pour M , qui satisfait de plus les inégalités suivantes :

$$|D_x^m D_y^n p(t, s; x, y)| \leq C(s - t)^{-(d+|m|+|n|)/2} \exp(-c \frac{|x - y|^2}{s - t})$$

$$|D_t p(t, s; x, y)| \leq C(s - t)^{-(d+2)/2} \exp(-c \frac{|x - y|^2}{s - t})$$

pour $|m| \leq 2$, c et C sont des constantes positives. De plus, les fonctions $D_x^m p(t, s; x, y) (|m| \leq 2)$ et $D_t p(t, s; x, y)$ sont continues dans $[0, T] \times [0, T] \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d, t < s$.

- (ii) Si $c(t, x) \equiv 0$, la solution fondamentale est la densité de transition du processus markovien associé au processus $(X_t, t \geq 0)$:

$$dX_t = \sigma(t, X_t) dW_t + b(t, X_t) dt$$

avec $\sigma(t, x)$ tel que :

$$(a_{i,j}(t, x)) = \sigma(t, x) \sigma(t, x)^*.$$

1.4 Prix et couvertures des options : le cas markovien

Nous revenons maintenant aux options et à leur couverture dans le cas de modèles markoviens et nous montrons comment on peut calculer les prix et les couvertures dans ce cas.

Une *option européenne* d'échéance T est définie par le droit de recevoir à l'instant d'exercice T , une richesse h . Dans la pratique, h prend souvent la forme de $f(X_T^1, \dots, X_T^d)$, où f est une fonction réelle définie sur \mathbf{R}^d , et X_T^1, \dots, X_T^d sont les d actifs risqués. C'est ce cas que nous allons étudier pour l'essentiel dans la suite. Les exemples les plus classiques sont l'option d'achat ("call") sur une unité de combinaison de certains actifs, de prix d'exercice K ($h = (\sum_{i=1}^d \lambda_i X_T^i - K)_+$) et l'option de vente ("put") de prix d'exercice K ($h = (K - \sum_{i=1}^d \lambda_i X_T^i)_+$).

1.4.1 Calcul du prix

Lorsque le marché est viable et complet (ce qui est le cas dans notre modèle d'actif), on utilise la méthode de réplication pour calculer le prix des actifs contingents : le prix à chaque instant d'un actif simulable par une stratégie admissible est égale à la valeur de cette stratégie autofinancée. D'autre part, comme sous la probabilité $\tilde{\mathbf{P}}$ les actifs actualisés sont des martingales on en déduit que cette valeur V_t ne peut être égale qu'à :

$$V_t = \tilde{\mathbf{E}} \left(e^{-r(T-t)} h | \mathcal{F}_t \right).$$

Dans ce qui va suivre nous supposons que $h = f(X_T^1, \dots, X_T^d)$ avec f une fonction à croissance polynômiale. Il est alors facile de montrer que h est bien dans $L^2(\tilde{\mathbf{P}})$. De plus, compte tenu du fait que dans notre modèle les actifs risqués vérifient l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t^i = rX_t^i dt + X_t^i \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}(t, X_t^1, \dots, X_t^d) dW_t^j, \quad i = 1, \dots, d, \quad (1.6)$$

le processus $(X_t, t \geq 0)$ est markovien sous la probabilité $\tilde{\mathbf{P}}$. Nous noterons $(X_s^{t,x}, s \geq t)$ le processus issu de x à l'instant t , avec la filtration $\{\mathcal{F}_{t,s}\}_{s \geq t}$, où $\mathcal{F}_{t,s} = \sigma(W_{t'} - W_t, t \leq t' \leq s)$. Le caractère markovien de X_t permet de prouver que :

$$V_t = F(t, X_t),$$

avec :

$$F(t, x) = \tilde{\mathbf{E}} \left(e^{-r(T-t)} f(X_T^{t,x}) \right). \quad (1.7)$$

Dans la proposition suivante nous identifions l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la fonction $F(t, x)$.

Proposition 1.4.1 $F(t, x)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + Au - ru = 0 & \text{pour } t \in [0, T[, \\ u(T, x) = f(x). \end{cases} \quad (1.8)$$

où A_t est le générateur infinitésimal de X_t sous $\tilde{\mathbf{P}}$, c'est à dire :

$$A_t u = r \sum_{i=1}^d x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d a_{ij} x_i x_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Démonstration : Pour prouver cela nous allons utiliser les conditions (A1) – (A3). D'autre part nous ne traitons en détail que le cas de la dimension 1. Le cas multidimensionnel se traite de façon identique, les notations étant sensiblement plus complexes en dimension 1.

On utilise le théorème 1.3.3, mais ici l'opérateur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au - ru$$

n'est pas uniformément parabolique comme le demande le théorème. Pour contourner cette difficulté on pose :

$$G(t, y) = F(t, e^y).$$

Il est alors facile de voir que :

$$G(t, y) = e^{-r(T-t)} \mathbf{E}(f(e^{Y_T^{t,y}})) \quad (1.9)$$

où :

$$Y_t^i = \log(X_t^i), \quad \forall i = 1..d. \quad (1.10)$$

On peut alors vérifier que $(Y_t, t \geq 0)$ est solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dY_t = \sigma(t, e^{Y_t}) dW_t + (r - \frac{1}{2} \sigma^2(t, e^{Y_t})) dt,$$

dont le générateur infinitésimal A_Y est :

$$A_Y u = \frac{1}{2} \sigma^2(t, e^x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (r - \frac{1}{2} \sigma^2(t, e^x)) \frac{\partial u}{\partial x}$$

comme σ satisfait la condition d'ellipticité, l'opérateur

$$Mu = \frac{\partial u}{\partial t} + A_Y u - ru$$

est uniformément parabolique et vérifie de plus les conditions (A1) – (A3). On applique alors le théorème 1.3.3 au processus Y_t . Sa densité de transition $p(t, s; x, y)$ coïncide avec la solution fondamentale de M , qui est dans $C^{1,2}([0, T[\times \mathbf{R}^d)$, donc par (1.7) et (1.9) on obtient que $F(t, x)$ est dans $C^{1,2}([0, T[\times \mathbf{R})$ aussi, donc satisfait (1.8). De plus, on a :

$$\begin{aligned} G(t, x) &= e^{-r(T-t)} \mathbf{E}(f(e^{Y_T^{t,x}})) \\ &= e^{-r(T-t)} \int_{\mathbf{R}} f(e^y) p(t, T; x, y) dy \end{aligned}$$

donc :

$$F(t, x) = G(t, \log x) = e^{-r(T-t)} \int_{\mathbf{R}} f(e^y) p(t, T; \log x, y) dy \quad (1.11)$$

Alors on vérifie, en utilisant la définition de solution fondamentale que $F(t, x)$ satisfait (1.8). ■

1.4.2 Calcul de la couverture

On a vu dans la proposition 1.2.9 que, dans notre modèle, le marché est complet. Tous les L^2 -actifs contingents sont donc L^2 -simulables et toute option européenne dans $L^2(\tilde{\mathbf{P}})$ peut être couverte parfaitement, i.e. il existe une couverture parfaite. La proposition suivante montre comment l'on peut exprimer cette couverture parfaite :

Proposition 1.4.2 *Si f est une fonction à croissance polynômiale, la quantité du $i^{\text{ème}}$ actif risqué qu'il faut détenir à l'instant t pour constituer le portefeuille de couverture parfaite est donné par H_t^i avec :*

$$H_t^i = \frac{\partial F}{\partial x_i}(t, X_t) \quad (1.12)$$

Démonstration : Comme $f(X_T)$ est de carré intégrable, en utilisant le théorème de représentation de martingale, il existe un unique processus prévisible $\{H_t^i\}_{i=1..d}$, tel que le prix actualisé s'écrit \tilde{V}_t :

$$\tilde{V}_t = V_0 + \int_0^t H_t \cdot d\tilde{X}_t.$$

D'autre part par formule d'Ito, la partie diffusion de \tilde{V}_t est:

$$\int_0^T \sum_{i=1}^d \frac{\partial F}{\partial x_i}(t, X_t) d\tilde{X}_t^i.$$

alors par unicité de la représentation de L^2 martingale, on a $H_t = \frac{\partial F}{\partial x_i}(t, X_t) dt \times d\tilde{\mathbf{P}}_{\text{p.s.}}$. ■

1.4.3 Couvertures approchées d'options européennes

Dans un marché à temps continu, comme celui que nous venons de présenter, pour se couvrir parfaitement, il est nécessaire d'intervenir à tout instant sur le marché. Ceci est bien sûr irréaliste entre autres pour des raisons liées aux coûts de transaction. On cherche alors à intervenir en un nombre fini d'instantanés pour couvrir approximativement l'option, ceci donne une couverture "approchée" de l'option. Nous allons maintenant décrire deux techniques de couverture approchée d'options à des temps fixes.

Supposons que l'on cherche à couvrir une option européenne d'échéance T sur un actif contingent $h = f(X_T)$ et que l'on souhaite intervenir en des instantanés $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ que l'on s'est fixé à l'avance. Il convient donc de déterminer à l'instant t_k la quantité $H_{t_k}^i$ du $i^{\text{ème}}$ actif sous-jacent qui permettra de constituer une couverture approchée. Nous supposons que cette quantité d'actif sera laissée constante sur les intervalles $[t_k, t_{k+1}[$. Cela signifie que l'on définit une couverture à temps continu en posant :

$$H_t^i = H_{t_k}^i, \forall t \in [t_k, t_{k+1}[\forall i = 1..d. \quad (1.13)$$

Dans ce qui suit nous supposons que les t_k sont régulièrement répartis, c'est à dire que $t_k = k\varepsilon$.

Couverture approchée élémentaire Une façon naturelle de définir une couverture approchée est d'utiliser directement la formule de couverture parfaite aux instantanés $t_k = k\varepsilon$. Cela signifie que l'on définit une couverture $(H_t^\varepsilon)_{0 \leq t \leq T}$ par :

$$H_t^{i,\varepsilon} = H_{k\varepsilon}^i, \text{ si } t \in [k\varepsilon, (k+1)\varepsilon[, \quad (1.14)$$

On appellera cette couverture, la *couverture approchée élémentaire*.

Couverture approchée optimale Nous allons maintenant comparer cette couverture à la meilleure des couvertures lorsque l'on intervient aux instants $k\varepsilon$. Plus précisément nous allons considérer la couverture qui minimise le risque quadratique résiduel sous la probabilité $\tilde{\mathbf{P}}$, parmi l'ensemble des couvertures approchées à pas fixe.

Précisons, tout d'abord, la notion de risque résiduel quadratique. Soit $(K_s, 0 \leq s \leq T)$, une stratégie de gestion admissible, avec $K_s = (K_s^0, K_s^1, \dots, K_s^d)$ qui définit un choix de quantités d'actifs à détenir dans cette stratégie de couverture. Pour évaluer une stratégie on introduit comme indicateur de risque, la variance du défaut de couverture, sous la probabilité risque neutre :

$$R(K) = \tilde{\mathbf{E}}((h - V_T(K))^2). \quad (1.15)$$

Remarque 1.4.3 Le choix de la probabilité $\tilde{\mathbf{P}}$ pour calculer la variance résiduelle est arbitraire. Il est sans doute préférable de minimiser la variance sous la probabilité initiale \mathbf{P} . Le choix de $\tilde{\mathbf{P}}$ est justifié par le fait que les calculs sont alors, à la fois plus simples et plus explicites¹.

On peut alors exprimer cette variance résiduelle en fonction de la couverture parfaite $(H_t, t \geq 0)$.

Lemme 1.4.4 Soit K une stratégie de gestion admissible, on a alors :

$$R(K) = e^{2rT} \sum_{i=1}^d \tilde{\mathbf{E}} \left(\int_0^T (\tilde{X}_s^i)^2 \left(\sum_{j=1}^d \sigma_{ij}(t, X_s) (H_s^j - K_s^j) \right)^2 ds \right). \quad (1.16)$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} R(K) &= \tilde{\mathbf{E}} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} (H_t - K_{k\varepsilon})^* d\tilde{X}_t \right)^2 \\ &= \tilde{\mathbf{E}} \left(\int_0^T (H_t - K_{k\varepsilon})^* I_{\tilde{X}_t} \sigma_t dW_t \right)^2 \\ &= \tilde{\mathbf{E}} \left(\int_0^T \|\sigma_t^* I_{\tilde{X}_t} (H_t - K_{k\varepsilon})\|^2 dt \right), \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

On définit C_ε par :

$$C_\varepsilon = \{(K_t)_{0 \leq t \leq T} \text{ stratégie de gestion } L^2\text{-admissible, } K_t = K_{k\varepsilon}, \text{ si } t \in [k\varepsilon, (k+1)\varepsilon[\}.$$

1. Nous reviendrons sur ce problème de la minimisation de la variance sous la probabilité \mathbf{P} à la section 2.4

On a alors le résultat suivant :

Proposition 1.4.5 *Soit $h = f(X_T)$, f étant à croissance polynômiale. Soit $(H_t, t \geq 0)$ la stratégie de couverture parfaite associée. Si $H^{(\varepsilon)}$ est la stratégie de couverture définie par, si $k = 1..d$:*

$$H_t^{(\varepsilon)} = H_{(k\varepsilon)}, \forall t \in [k\varepsilon, (k+1)\varepsilon[,$$

avec :

$$H_{(k\varepsilon)}^i = \mathbf{E}^{-1} \left(\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} e^{-2ru} I_{X_u} \sigma_u \sigma_u^* I_{X_u} du \middle| \mathcal{F}_{k\varepsilon} \right) \mathbf{E} \left(\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} e^{-2ru} I_{X_u} \sigma_u \sigma_u^* I_{X_u} H_u du \middle| \mathcal{F}_{k\varepsilon} \right). \quad (1.17)$$

Alors $H^{(\varepsilon)}$ permet de définir une stratégie de gestion admissible qui minimise le risque résiduel parmi toutes les stratégies de C_ε . $H^{(\varepsilon)}$ définit ce que nous appellerons la couverture approchée optimale.

Démonstration : Pour $K \in C_\varepsilon$, nous venons de voir que le risque résiduel vaut :

$$R(K) = \mathbf{E} \left(\int_0^T \|\sigma_t^* I_{\tilde{X}_t} (H_t - K_{k\varepsilon})\|^2 dt \right),$$

on en déduit que

$$\begin{aligned} R(K) &= \mathbf{E} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \|\sigma_t^* I_{\tilde{X}_t} (H_t - K_{k\varepsilon})\|^2 dt \right) \\ &= \mathbf{E} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} (\|\sigma_t^* I_{\tilde{X}_t} H_t\|^2 + \|\sigma_t^* I_{\tilde{X}_t} K_{k\varepsilon}\|^2 - 2H_t^* I_{\tilde{X}_t} \sigma_t \sigma_t^* I_{\tilde{X}_t} K_{k\varepsilon}) dt \right). \end{aligned}$$

En conditionnant par la tribu $\mathcal{F}_{k\varepsilon}$ on obtient:

$$\begin{aligned} R(K) &= \mathbf{E} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \left(\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \|\sigma_t^* I_{\tilde{X}_t} H_t\|^2 dt + K_{k\varepsilon}^* \mathbf{E} \left(\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} I_{\tilde{X}_u} \sigma_u \sigma_u^* I_{\tilde{X}_u} du \middle| \mathcal{F}_{k\varepsilon} \right) K_{k\varepsilon} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2K_{k\varepsilon}^* \mathbf{E} \left(\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} I_{\tilde{X}_u} \sigma_u \sigma_u^* I_{\tilde{X}_u} H_u du \middle| \mathcal{F}_{k\varepsilon} \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Un calcul d'algèbre linéaire simple montre que $H_{(k\varepsilon)}$ donné par (1.17) minimise le risque résiduel . En effet il suffit de noter que si C est $d \times d$ matrice symétrique définie positive et h est un vecteur de dimension d , alors le vecteur minimisant

$$x^* C x - 2x^* h$$

est donné par $C^{-1}h$. ■

Chapitre 2

Couverture Approchée en dimension 1

Dans ce chapitre nous allons étudier des couvertures approchées à pas de temps fixe en dimension 1 avec la volatilité stochastique. Nous calculerons l'ordre de convergence du risque résiduel quadratique de ces couvertures, pour des actifs contingents fonctions des valeurs finales des actifs sous-jacents dont le call et le put.

Nous étudierons la couverture approchée élémentaire et optimale, et nous montrerons des théorèmes précisant l'ordre de convergence du risque résiduel quadratique de ces deux sortes de couvertures approchées. Le résultat essentiel de cette partie est de prouver que, sous certaine condition de régularité sur la volatilité σ , les deux couvertures approchées ont le même ordre de convergence de risque résiduel quadratique quand le pas du temps d'intervention tend vers zéro.

Rappelons que, dans ce cas, le marché est décrit par un actif sans risque dont le prix à l'instant t est noté X_t^0 , et un actif risqué, de prix X_t , solutions de l'équation, sous la probabilité risque neutre $\tilde{\mathbf{P}}$:

$$\begin{cases} \frac{dX_t^0}{X_t^0} = rdt \\ \frac{dX_t}{X_t} = rdt + \sigma(t, X_t)dW_t. \end{cases} \quad (2.1)$$

On suppose que

(A) $\sigma(t, x)$ est borné et de classe $C^{1,\infty}([0, T] \times \mathbf{R})$, que $x \frac{\partial \mu}{\partial x}$, $x \frac{\partial \sigma}{\partial x}$, $x^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}$ et $x^3 \frac{\partial^3 \sigma}{\partial x^3}$ sont uniformément bornés, et $\sigma(t, x)$ est Hölder continu en x uniformément par rapport à (t, x) dans $[0, T] \times \mathbf{R}^d$.

Remarquons que $x\sigma(t, x)$ est lipschitzienne en x uniformément par rapport à t , puisque sa dérivée partielle en x est borné, du fait que $x \frac{\partial \sigma}{\partial x}$ est uniformément borné. On suppose enfin que, pour tout t, x , $|\sigma(t, x)| \geq \eta$.

(2.1) a une solution trajectoriellement unique, de plus si $X_0^0 = 1$, on a $X_t^0 = e^{rt}$ et si $X_0 = x$ on peut écrire X_t sous la forme :

$$X_t = xe^{\int_0^t \sigma_s dW_s + \int_0^t (r - \frac{1}{2}\sigma_s^2) ds}. \quad (2.2)$$

Nous supposons que l'actif contingent est de la forme $f(X_T)$, où f satisfait l'hypothèse suivante :

(H1) f est une fonction absolument continue, donc presque partout dérivable, telle que :

$$|f(x)| + |f'(x)| \leq L(1 + |x|^\alpha), \text{ p.s. } x \in \mathbf{R} \quad (2.3)$$

où L et α sont deux constantes positives.

Remarque

- Cette hypothèse assure que $f(X_T)$ est de carrée intégrable.
- Les fonctions convexes, dont les dérivés à gauche (ou à droite) sont à croissance polynômiale vérifient l'hypothèse (H1) . Donc les puts, les calls et toutes les combinaisons linéaires de put et de call.

Nous aurons besoin pour certains résultats d'une hypothèse de régularité sur σ :

(H2) Il existe $C, n > 0$ tels que

$$\left| \frac{\partial \sigma}{\partial t}(t, x) \right| \leq C(1 + |x|^n).$$

2.1 Énoncés des résultats pour les couvertures approchées élémentaire et optimale

On étudie que des couvertures approchées à pas de temps fixe, c'est à dire, on intervient aux moments où $t = t_k = \frac{T}{N}$, $k = 0..N - 1$. Notons $\varepsilon = \frac{T}{N}$.

Nous étudierons deux types de couvertures, la *couverture approchée élémentaire* et la couverture approchée optimale.

La *couverture approchée élémentaire* est définie par :

$$H_t^\varepsilon = H_{k\varepsilon}, \text{ si } t \in [k\varepsilon, (k+1)\varepsilon[, \quad (2.4)$$

avec $H_t = \frac{\partial F}{\partial x}(t, X_t)$ le processus de la couverture parfaite.

La couverture approchée optimale est définie par :

$$H_t^{(\varepsilon)} = H_{(k\varepsilon)}, \forall t \in [k\varepsilon, (k+1)\varepsilon[,$$

avec :

$$H_{(k\varepsilon)} = \frac{\mathbf{E} \left(\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} H_u \tilde{X}_u^2 \sigma^2(u, X_u) du | \mathcal{F}_{k\varepsilon} \right)}{\mathbf{E} \left(\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \tilde{X}_u^2 \sigma^2(u, X_u) du | \mathcal{F}_{k\varepsilon} \right)}. \quad (2.5)$$

rappelons que on définit le risque résiduel quadratique par

$$R_\varepsilon = \mathbf{E}(\tilde{V}_T - \tilde{V}_T^\varepsilon)^2,$$

avec $V_T = e^{-rT}f(X_T)$, \tilde{V}_T^ε valeur actualisée de la processus de couverture.

Notation 2.1.1 *On note*

$$g(t) \triangleq \mathbf{E} \left(\left(\frac{\partial H_t}{\partial x} \right)^2 \sigma_t^4 X_t^4 \right). \quad (2.6)$$

Une autre hypothèse de technique est nécessaire:

(H3) il existe $\eta > 0$ telle que

$$\mathbf{E} \left(\int_0^T \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, X_t) \right)^{2+\eta} dt \right) < \infty$$

On a alors le théorème suivant qui précise la vitesse de la convergence du risque résiduel lorsque le pas de couverture ε tend vers 0 :

Théorème 2.1.2 *Sous l'hypothèse (H1) on a :*

(i)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{R_\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \left(\int_0^T e^{-2rt} X_t^4 \sigma^4(t, X_t) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, X_t) \right)^2 dt \right). \quad (2.7)$$

(ii) Si de plus **(H2)** et **(H3)** sont vérifiés, et $|g'(t)| \leq \frac{C}{(T-t)^{3/2}}$, alors on a plus précisément :

$$\frac{R_\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \left(\int_0^T e^{-2rt} X_t^4 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, X_t) \right)^2 \sigma^4(t, X_t) dt \right) + O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}). \quad (2.8)$$

Corollaire 2.1.3 *Sous l'hypothèse (H1), (H2), et pour call ou put, ou pour f deux fois dérivable avec $|f''(x)|$ à croissance polynômiale, (2.8) est vrai.*

Ce corollaire est conséquence direct du lemme 2.2.37 que l'on va démontrer. La démonstration de ce théorème se trouve dans la section 2.2.5.

Nous donnons le théorème sur l'ordre de convergence vers 0 du risque résiduel quadratique de la couverture optimale, quand la fréquence d'interventions tend vers l'infini :

Théorème 2.1.4 *Si les hypothèses (H1) et (H2) sont satisfaites alors :*

$$|R(H^\varepsilon) - R(H^{(\varepsilon)})| \leq K \varepsilon^2,$$

avec la notation (1.15).

Ceci implique que le risque résiduel de la couverture optimale converge vers zéro avec pratiquement le même ordre de convergence que celui de la couverture élémentaire. En particulier les résultats du théorème 2.1.2 restent vrais dans le cas de la couverture optimale.

Remarque 2.1.5 On voit donc que sous les hypothèses (H1) et (H2) la couverture optimale n'est pas asymptotiquement meilleure que la couverture élémentaire. Ce résultat permet de justifier l'utilisation de la couverture élémentaire dans les cas pratiques, alors que la couverture optimale semblait a priori sensiblement meilleure.

La démonstration de ce théorème se trouve à section 2.2.6.

L'essentiel de ce chapitre est maintenant consacrée aux démonstrations de ces deux théorèmes.

2.2 Démonstrations

2.2.1 Un ensemble de processus, l'espace \mathcal{M}^2

On définit un espace \mathcal{M}^2 , qui nous servira dans la démonstration des deux théorèmes de la section 2.1.

Définition 2.2.1 L'espace $\mathcal{M}^2(\mathbf{P})$ sera constitué des processus d'Ito $\{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ adaptés H_t :

$$dH_t = a_t dt + b_t dW_t$$

tels que $\forall p \geq 1$,

$$\mathbf{E} \left\{ \left(\int_0^T (a_t^2 + b_t^2) dt \right)^p \right\} < \infty.$$

On vérifie sans difficultés que $\mathcal{M}^2(\mathbf{P})$ est un espace vectoriel. Les deux lemmes qui suivent se démontrent à l'aide de l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy :

Lemme 2.2.2 Pour H dans $\mathcal{M}^2(\mathbf{P})$, on a $\mathbf{E} \sup_{0 \leq t \leq T} |H_t|^p < \infty$, pour tout p positif.

Lemme 2.2.3 Une martingale $\{M_t\}_{t \in [0, T]}$ à trajectoires continues est dans $\mathcal{M}^2(\mathbf{P})$ si et seulement si M_T est dans $L^p(\Omega, \mathbf{P})$ pour tout $p \geq 1$.

Définition 2.2.4 On dira que \mathbf{P}_1 et \mathbf{P}_2 deux probabilités équivalentes sont fortement équivalentes si $\frac{d\mathbf{P}_1}{d\mathbf{P}_2} \in L^p(\mathbf{P}_2)$ et $\frac{d\mathbf{P}_2}{d\mathbf{P}_1} \in L^p(\mathbf{P}_1)$, pour tout $p \geq 1$. On notera alors $\mathbf{P}_1 \simeq \mathbf{P}_2$.

Remarque 2.2.5 Il est facile de montrer, en utilisant l'inégalité de Cauchy Schwartz que, si $\mathbf{P} \simeq \mathbf{Q}$ alors $\mathcal{M}^2(\mathbf{P}) = \mathcal{M}^2(\mathbf{Q})$.

Notons de plus que si \mathbf{P} et \mathbf{Q} sont telles que :

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} = \exp\left(\int_0^T c_t dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T c_t^2 dt\right)$$

avec c_t processus adapté, continu et uniformément borné, alors $\mathbf{P} \simeq \mathbf{Q}$ et donc $\mathcal{M}^2(\mathbf{P}) = \mathcal{M}^2(\mathbf{Q})$.

Définition 2.2.6 $\mathcal{N}^2(\mathbf{P})$ est l'ensemble des processus Y dans $\mathcal{M}^2(\mathbf{P})$ tel qu'il existe une version de b_t^Y satisfait, pour tout $p > 0$:

$$\mathbf{E} \left(\sup_{t \leq T} |b_t^Y|^p \right) < \infty.$$

Évidemment un processus de $\mathcal{M}^2(\mathbf{P})$ qui est à variation bornée est dans $\mathcal{N}^2(\mathbf{P})$.

Le lemme suivant montre que $\mathcal{N}^2(\mathbf{P})$ est une sorte de noyau de multiplication pour $\mathcal{M}^2(\mathbf{P})$:

Lemme 2.2.7 Si $X \in \mathcal{M}^2(\mathbf{P})$, $Y \in \mathcal{N}^2(\mathbf{P})$, alors $XY \in \mathcal{M}^2(\mathbf{P})$.

Démonstration : X et Y s'expriment respectivement par :

$$dX_t = a_t^X dt + b_t^X dW_t,$$

et :

$$dY_t = a_t^Y dt + b_t^Y dW_t.$$

En utilisant la formule d'Ito, on obtient :

$$\begin{aligned} dX_t Y_t &= X_t dY_t + Y_t dX_t + \langle X, Y \rangle_t \\ &= X_t (a_t^Y dt + b_t^Y dW_t) + Y_t (a_t^X dt + b_t^X dW_t) + b_t^X b_t^Y dt \\ &= (X_t a_t^Y + Y_t a_t^X + b_t^X b_t^Y) dt + (X_t b_t^Y + Y_t b_t^X) dW_t, \end{aligned}$$

Pour vérifier que XY est dans $\mathcal{M}^2(\mathbf{P})$, on remarque que :

$$\begin{aligned} &\mathbf{E} \left(\int_0^T |X_t a_t^Y + Y_t a_t^X + b_t^X b_t^Y|^2 dt \right)^p \\ &\leq C \left(\mathbf{E} \sup_{t \leq T} |X_t|^{2p} \left(\int_0^T |a_t^Y|^2 dt \right)^p \right) + C \mathbf{E} \left(\sup_{t \leq T} |Y_t|^{2p} \left(\int_0^T |a_t^X|^2 dt \right)^p \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C \mathbf{E} \left(\int_0^T |b_t^X b_t^Y|^2 dt \right)^p \\
\leq & C \mathbf{E} \left(\sup_{t \leq T} |X_t|^{2p} \left(\int_0^T |a_t^Y|^2 dt \right)^p \right) + C \mathbf{E} \left(\sup_{t \leq T} |Y_t|^{2p} \left(\int_0^T |a_t^X|^2 dt \right)^p \right) \\
& + C \mathbf{E} \left(\sup_{t \leq T} |b_t^Y|^{2p} \left(\int_0^T |b_t^X|^2 dt \right)^p \right) \\
\leq & C \mathbf{E} \left(\sup_{t \leq T} |X_t|^{4p} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbf{E} \left(\int_0^T |a_t^Y|^2 dt \right)^{2p} \right)^{\frac{1}{2}} \\
& + C \left(\mathbf{E} \sup_{t \leq T} |Y_t|^{4p} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbf{E} \left(\int_0^T |b_t^Y|^2 dt \right)^{2p} \right)^{\frac{1}{2}} \\
& + C \left(\mathbf{E} \sup_{t \leq T} |b_t^Y|^{4p} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbf{E} \left(\int_0^T |b_t^X|^2 dt \right)^{2p} \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

En utilisant le lemme 2.2.2 et la définition de $\mathcal{M}^2(\mathbf{P})$ et $\mathcal{N}^2(\mathbf{P})$, on voit que ceci est borné. On vérifie de même que :

$$\mathbf{E} \left(\int_0^T |X_t b_t^Y + Y_t b_t^X|^2 dt \right)^p < +\infty,$$

et l'on en déduit que XY est dans $\mathcal{M}^2(\mathbf{P})$. ■

La proposition suivante donne une estimation qui nous servira ultérieurement.

Proposition 2.2.8 *Si U est un processus d'Ito \mathcal{F}_t -prévisible tel que :*

$$dU_t = a_t dt + b_t dW_t$$

avec :

$$\mathbf{E} \left(\int_0^T (|a_t|^2 + |b_t|^2) dt \right) < \infty,$$

et on définit

$$e_\varepsilon = \mathbf{E} \left(\int_0^T (U_t - U_t^\varepsilon) dW_t \right)^2,$$

alors, on a :

$$\mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t a_s ds \right)^2 dt \text{ est un } O(\varepsilon^2), \quad (2.9)$$

$$\mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left| \int_{k\varepsilon}^t a_s ds \right| \left| \int_{k\varepsilon}^t b_s dW_s \right| dt \text{ est un } O(\varepsilon^{3/2}). \quad (2.10)$$

De plus :

$$\begin{aligned} e_\varepsilon &\triangleq \mathbf{E} \left(\left(\int_0^T (U_t - U_t^\varepsilon) dW_t \right)^2 \right) \\ &= \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^t b_s^2 ds dt + O(\varepsilon^{3/2}). \end{aligned}$$

En particulier e_ε est au plus d'ordre $O(\varepsilon)$.

Démonstration : On commence par remarquer que :

$$\begin{aligned} e_\varepsilon &= \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} (U_t - U_{k\varepsilon})^2 dt \\ &= \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t a_s ds + \int_{k\varepsilon}^t b_s dW_s \right)^2 dt \\ &= \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t a_s ds \right)^2 dt + 2\mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t a_s ds \right) \left(\int_{k\varepsilon}^t b_s dW_s \right) dt \\ &\quad + \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t b_s dW_s \right)^2 dt \\ &= \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t a_s ds \right)^2 dt + 2\mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t a_s ds \right) \left(\int_{k\varepsilon}^t b_s dW_s \right) dt \\ &\quad + \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^t b_s^2 ds dt. \end{aligned}$$

Il n'y a qu'à montrer que les premier et second terme sont des $O(\varepsilon^{3/2})$. Pour le premier terme, on remarque que :

$$\begin{aligned} &\mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t a_s ds \right)^2 dt \\ &\leq \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \varepsilon \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} a_s^2 ds dt \\ &\leq \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon^2 \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} a_s^2 ds = \varepsilon^2 \mathbf{E} \int_0^T a_s^2 ds, \end{aligned}$$

donc il est d'ordre $O(\varepsilon^2)$, et (2.9) est vérifié. Quant au second terme, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on montre qu'il est plus petit que :

$$\begin{aligned}
& 2 \left(\mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t a_s ds \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t b_s dW_s \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq 2 \left(\mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon^2 \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} a_s^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t b_s dW_s \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
& = 2 \left(\varepsilon^2 \mathbf{E} \int_0^T a_s^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^t b_s^2 ds dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq 2\varepsilon \left(\mathbf{E} \int_0^T a_s^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} b_s^2 ds dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
& = 2\varepsilon \left(\mathbf{E} \int_0^T a_s^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\varepsilon \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} b_s^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
& = 2\varepsilon^{3/2} \left(\mathbf{E} \int_0^T a_s^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbf{E} \int_0^T b_s^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

On en déduit que le second terme est un $O(\varepsilon^{3/2})$, puis que (2.10) est vérifié. Enfin on remarque que le troisième terme est plus petit que :

$$\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} b_s^2 ds dt = \varepsilon \int_0^T b_s^2 ds,$$

ce qui prouve que e_ε est au plus d'ordre $O(\varepsilon)$. ■

2.2.2 Une évaluation formelle

On a vu que si H_t est la couverture parfaite d'un payoff dans L^2 , le risque quadratique est

$$R_\varepsilon = \mathbf{E} \left(\int_0^T (H_t - H_t^\varepsilon) d\tilde{X}_t \right)^2,$$

avec H_t^ε la couverture élémentaire défini dans (2.4) et on étudie l'estimation de

$$R(\varepsilon, H) \triangleq \mathbf{E} \left(\int_0^T (H_t - H_t^\varepsilon) d\tilde{X}_t \right)^2 = \mathbf{E} \left(\int_0^T (H_t - H_t^\varepsilon)^2 \sigma^2(t, X_t) \tilde{X}_t^2 dt \right).$$

Soit $H \in \mathcal{M}^2(\mathbf{P})$, avec

$$H_t = H_0 + \int_0^t a_s ds + \int_0^t b_s dW_s.$$

On a les lemmes suivants :

Lemme 2.2.9 $\mathbf{E} \int_0^T (H_t - H_t^\varepsilon)^2 dt$ est au plus $O(\varepsilon)$.

Démonstration :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \int_0^T (H_t - H_t^\varepsilon)^2 dt &= \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t a_s ds + \int_{k\varepsilon}^t b_s dW_s \right)^2 dt \\ &\leq 2\mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\left(\int_{k\varepsilon}^t a_s ds \right)^2 + \left(\int_{k\varepsilon}^t b_s dW_s \right)^2 \right) dt \\ &= 2\mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\left(\int_{k\varepsilon}^t a_s ds \right)^2 + \left(\int_{k\varepsilon}^t b_s^2 ds \right) \right) dt \\ &\leq 2\mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\varepsilon \left(\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} a_s^2 ds \right) + \left(\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} b_s^2 ds \right) \right) dt \\ &= 2\varepsilon^2 \mathbf{E} \left(\int_0^T a_s^2 ds \right) + 2\varepsilon \mathbf{E} \left(\int_0^T b_s^2 ds \right) dt \end{aligned}$$

Donc c'est un $O(\varepsilon)$. ■

Lemme 2.2.10 $R(\varepsilon, \int_0^\cdot b_s dW_s)$ est au plus $O(\varepsilon)$.

Démonstration :

$$\begin{aligned} R(\varepsilon, \int_0^\cdot b_s dW_s) &= \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t b_s dW_s \right) d\tilde{X}_t \right)^2 \\ &= \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t b_s dW_s \right)^2 \sigma^2(t, X_t) \tilde{X}_t^2 dt \\ &= \bar{\mathbf{E}} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t b_s dW_s \right)^2 c(t, X_t) dt \end{aligned}$$

avec $c(t, X_t)$ borné et

$$\frac{d\bar{\mathbf{P}}}{d\mathbf{P}} = \mathcal{E}\left(\int_0^\cdot 2\sigma_s dW_s\right)_T,$$

donc on a

$$R(\varepsilon, \int_0^\cdot b_s dW_s) \leq \bar{\mathbf{E}} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t b_s dW_s\right)^2 dt.$$

Remarquons que $\bar{\mathbf{P}} \simeq \mathbf{P}$, et donc $\mathcal{M}^2(\bar{\mathbf{P}}) = \mathcal{M}^2(\mathbf{P})$, lemme 2.2.9 s'applique, et on a $R(\varepsilon, \int_0^\cdot b_s ds)$ est au plus $O(\varepsilon)$. ■

Lemme 2.2.11 $R(\varepsilon, \int_0^\cdot a_s ds)$ est au plus $O(\varepsilon^2)$.

Démonstration :

$$\begin{aligned} R(\varepsilon, \int_0^\cdot a_s ds) &= \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t a_s ds\right)^2 \sigma^2(t, X_t) \tilde{X}_t^2 dt \\ &= \bar{\mathbf{E}} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t a_s ds\right)^2 c(t, X_t) dt \\ &\leq C\varepsilon \bar{\mathbf{E}} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} a_s^2 ds\right) dt \\ &\leq C\varepsilon^2 \bar{\mathbf{E}} \int_0^T a_s^2 ds. \end{aligned}$$

d'où le lemme. ■

Proposition 2.2.12

$$R(\varepsilon, H) = R(\varepsilon, \int_0^\cdot b_s dW_s) + O(\varepsilon^{3/2}).$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} R(\varepsilon, H) &= R(\varepsilon, \int_0^\cdot a_s ds + \int_0^\cdot b_s dW_s) \\ &= R(\varepsilon, \int_0^\cdot b_s dW_s) + R(\varepsilon, \int_0^\cdot a_s ds) + \\ &\quad 2\mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t a_s ds\right) \left(\int_{k\varepsilon}^t b_s dW_s\right) \sigma^2(t, X_t) \tilde{X}_t^2 dt \end{aligned}$$

Comme $R(\varepsilon, \int_0^\cdot a_s ds)$ est au plus $O(\varepsilon^2)$, et le troisième terme est plus petit que

$$2(R(\varepsilon, \int_0^\cdot a_s ds))^{\frac{1}{2}}(R(\varepsilon, \int_0^\cdot b_s dW_s))^{\frac{1}{2}},$$

donc est au plus $O(\varepsilon^{3/2})$ par lemmes 2.2.11 et 2.2.10, on a finalement que

$$\begin{aligned} R(\varepsilon, H) &= R(\varepsilon, \int_0^\cdot b_s dW_s) + O(\varepsilon^2) + O(\varepsilon^{3/2}) \\ &= R(\varepsilon, \int_0^\cdot b_s dW_s) + O(\varepsilon^{3/2}) \end{aligned}$$

■

Proposition 2.2.13

$$R(\varepsilon, \int_0^\cdot b_s dW_s) = \mathbf{E} \sum_k \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^t e^{-2rs} b_s^2 \sigma_s^2 X_s^2 ds dt + r(\varepsilon),$$

où $r(\varepsilon)$ est $O(\varepsilon)$.

Si (H2) est vérifié, et qu'il existe $\eta > 0$ telle que

$$\mathbf{E} \left(\int_0^T |b_t|^{2+\eta} dt \right) < \infty \quad (2.11)$$

$r(\varepsilon)$ est d'ordre $O(\varepsilon^{3/2})$.

La démonstration de cette proposition se trouve au page 34.

Corollaire 2.2.14

$$R(\varepsilon, H) = \mathbf{E} \sum_k \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} e^{-2rs} b_s^2 \sigma_s^2 X_s^2 ds dt + r(\varepsilon).$$

Lemme 2.2.15 Soit $p \geq 1$, on a :

$$\sup_k \mathbf{E} \sup_{k\varepsilon \leq t \leq (k+1)\varepsilon} |X_t - X_{k\varepsilon}|^p \leq C \varepsilon^{\frac{p}{2}}.$$

Démonstration : On a :

$$X_t - X_{k\varepsilon} = \int_{k\varepsilon}^t r X_s ds + \int_{k\varepsilon}^t \sigma(s, X_s) X_s dW_s.$$

Donc :

$$|X_t - X_{k\varepsilon}|^p \leq C_p \left(\left(\int_{k\varepsilon}^t r |X_s| ds \right)^p + \left| \int_{k\varepsilon}^t \sigma(s, X_s) X_s dW_s \right|^p \right)$$

En utilisant l'inégalité de Doob, on obtient :

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \sup_{k\varepsilon \leq t \leq (k+1)\varepsilon} |X_t - X_{k\varepsilon}|^p \\ & \leq C_p \left(\mathbf{E} \left(\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} r |X_s| ds \right)^p + \mathbf{E} \left(\left| \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \sigma(s, X_s)^2 X_s^2 ds \right|^{p/2} \right) \right). \end{aligned}$$

Il est alors facile de montrer que le premier terme est d'ordre ε^p et le deuxième est d'ordre $\varepsilon^{p/2}$. Comme les constantes ne dépendent pas de k on obtient le résultat. ■

Lemme 2.2.16 *Si (2.11) est vérifié, on a*

$$\mathbf{E} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t b_s dW_s \right)^2 |X_t^2 - X_{k\varepsilon}^2| dt \right)$$

est un $O(\varepsilon^{3/2})$.

Démonstration : En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, avec

$$p_1, p_2, p_3 > 1, \quad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 1,$$

en prenant $p_3 = 1 + \eta/2$, on a :

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \sup_{k\varepsilon \leq t \leq (k+1)\varepsilon} |X_t| \sup_{k\varepsilon \leq t \leq (k+1)\varepsilon} |X_t - X_{k\varepsilon}| \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t b_s dW_s \right)^2 dt \\ & \leq \sum_{k=0}^{N-1} \left(\mathbf{E} \sup_{k\varepsilon \leq t \leq (k+1)\varepsilon} |X_t|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \left(\mathbf{E} \sup_{k\varepsilon \leq t \leq (k+1)\varepsilon} |X_t - X_{k\varepsilon}|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \\ & \quad \left(\mathbf{E} \left(\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t b_s dW_s \right)^2 dt \right)^{p_3} \right)^{\frac{1}{p_3}}. \end{aligned}$$

Le lemme 2.2.15 permet de voir que les deux premiers facteurs sont majoré par $C\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, la constante C ne dépendant pas de k . On voit donc que la quantité que l'on cherche à majorer est plus petite que :

$$\begin{aligned}
& C\varepsilon^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \mathbf{E} \left(\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t b_s dW_s \right)^2 dt \right)^{p_3} \right\}^{\frac{1}{p_3}} \\
& \leq C\varepsilon^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{E} \left(\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t b_s dW_s \right)^2 dt \right)^{p_3} \right)^{\frac{1}{p_3}} \cdot \varepsilon^{\frac{1}{p_3}-1}.
\end{aligned}$$

On obtient ce dernier résultat en utilisant l'inégalité de Hölder dans \mathbf{R}^N . De plus cette dernière quantité est plus petite que

$$\begin{aligned}
& C\varepsilon^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{E} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t b_s dW_s \right)^{2p_3} dt \varepsilon^{p_3-1} \right)^{\frac{1}{p_3}} \cdot \varepsilon^{\frac{1}{p_3}-1} \\
& \leq C\varepsilon^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{E} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t b_s^2 ds \right)^{p_3} dt \varepsilon^{p_3-1} \right)^{\frac{1}{p_3}} \cdot \varepsilon^{\frac{1}{p_3}-1} \\
& \leq C\varepsilon^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{E} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t b_s^{2p_3} ds \right) dt \varepsilon^{2(p_3-1)} \right)^{\frac{1}{p_3}} \cdot \varepsilon^{\frac{1}{p_3}-1} \\
& \leq C\varepsilon^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{E} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} b_t^{2p_3} dt \varepsilon^{2p_3-1} \right)^{\frac{1}{p_3}} \cdot \varepsilon^{\frac{1}{p_3}-1} \\
& = \varepsilon^{\frac{1}{2} + \frac{2p_3-1}{p_3} + \frac{1}{p_3} - 1} \mathbf{E} \int_0^T b_t^{2p_3} dt \\
& = \varepsilon^{\frac{3}{2}} \mathbf{E} \int_0^T b_t^{2p_3} dt
\end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration. ■

Lemme 2.2.17 *Sous l'hypothèse (H3) ,*

$$R(\varepsilon, \int_0^\cdot b_s dW_s) = \mathbf{E} \sum_k \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} e^{-2rt} \left(\int_{k\varepsilon}^t b_s dW_s \right)^2 \sigma^2(t, X_{k\varepsilon}) X_{k\varepsilon}^2 dt + r_1(\varepsilon),$$

avec $r_1(\varepsilon)$ d'ordre $O(\varepsilon^{3/2})$.

Démonstration :

$$r_1(\varepsilon) = \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} e^{-2rt} \left(\int_{k\varepsilon}^t b_s dW_s \right)^2 ((X_t \sigma(t, X_t))^2 - (X_{k\varepsilon} \sigma(t, X_{k\varepsilon}))^2) dt,$$

En tenant compte du caractère lipschitzien de $x\sigma(t, x)$, on prouve que cette quantité est majorée à une constante près par :

$$\mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t \left(\int_{k\varepsilon}^t b_s dW_s \right)^2 |X_t^2 - X_{k\varepsilon}^2| dt, \right.$$

et on finit la démonstration en utilisant le lemme 2.2.16. ■

Pour démontrer la proposition 2.2.13, on commence par utiliser le lemme 2.2.17,

$$\begin{aligned} R(\varepsilon, \int_0^\cdot b_s dW_s) &= \mathbf{E} \sum_k \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} e^{-2rt} \left(\int_{k\varepsilon}^t b_s \sigma(t, X_{k\varepsilon}) X_{k\varepsilon} dW_s \right)^2 dt + r_1(\varepsilon) \\ &= \mathbf{E} \sum_k \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} e^{-2rt} \int_{k\varepsilon}^t b_s^2 \sigma^2(t, X_{k\varepsilon}) X_{k\varepsilon}^2 ds dt + r_1(\varepsilon) \\ &= \mathbf{E} \sum_k \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^t e^{-2rs} b_s^2 \sigma^2(s, X_s) X_s^2 ds dt + r_4(\varepsilon) + r_3(\varepsilon) + r_2(\varepsilon) + r_1(\varepsilon) \end{aligned} \quad (2.12)$$

avec

$$\begin{aligned} r_2(\varepsilon) &= \mathbf{E} \sum_k \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} e^{-2rt} \int_{k\varepsilon}^t b_s^2 (\sigma^2(t, X_{k\varepsilon}) X_{k\varepsilon}^2 - \sigma^2(t, X_s) X_s^2) ds dt, \\ r_3(\varepsilon) &= \mathbf{E} \sum_k \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} e^{-2rt} \int_{k\varepsilon}^t b_s^2 (\sigma^2(t, X_s) - \sigma^2(s, X_s)) X_s^2 ds dt. \\ r_4(\varepsilon) &= \mathbf{E} \sum_k \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^t (e^{-2rt} - e^{-2rs}) b_s^2 \sigma^2(s, X_s) X_s^2 ds dt, \end{aligned}$$

On montre facilement que $r_2(\varepsilon)$ est du même ordre que $r_1(\varepsilon)$, en suivant le même raisonnement, et que $r_4(\varepsilon)$ est d'ordre $O(\varepsilon^2)$. Pour $r_3(\varepsilon)$, on a lemme suivant, qui permet de finir la démonstration de proposition 2.2.13 :

Lemme 2.2.18

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{r_3(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0,$$

et si en plus **(H2)** est vérifié, $r_3(\varepsilon)$ est d'ordre $O(\varepsilon^2)$.

Démonstration :

$$\begin{aligned}
|r_3(\varepsilon)| &= \mathbf{E} \sum \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} e^{-2rt} \int_{k\varepsilon}^t (b_s X_s)^2 |\sigma(t, X_s)^2 - \sigma(s, X_s)^2| ds dt \\
&\leq 2 \|\sigma\|_\infty \mathbf{E} \sum \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^t (b_s X_s)^2 |\sigma(t, X_s) - \sigma(s, X_s)| ds dt \\
&\leq 2 \|\sigma\|_\infty \mathbf{E} \sum \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} (b_s X_s)^2 \sup_{k\varepsilon \leq t < (k+1)\varepsilon} |\sigma(t, X_s) - \sigma(s, X_s)| ds dt \\
&= 2\varepsilon \|\sigma\|_\infty \mathbf{E} \sum \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} (b_s X_s)^2 \sup_{k\varepsilon \leq t < (k+1)\varepsilon} |\sigma(t, X_s) - \sigma(s, X_s)| ds dt.
\end{aligned}$$

Il est alors facile de montrer que $r_3(\varepsilon)/\varepsilon$ tend vers 0 quand ε tend vers 0 en utilisant le théorème de convergence de Lebesgue.

Si en plus **(H2)** est vérifié, c'est à dire:

$$\left| \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right| \leq L(1 + |x|^\alpha),$$

on peut obtenir une estimation plus précise de $r(\varepsilon)$. Pour cela, on note que :

$$\begin{aligned}
|r_3(\varepsilon)| &= \mathbf{E} \sum \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} e^{-2rt} \int_{k\varepsilon}^t (b_s X_s)^2 |\sigma(t, X_s)^2 - \sigma(s, X_s)^2| ds dt \\
&\leq 2 \|\sigma\|_\infty \mathbf{E} \sum \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^t (b_s X_s)^2 |\sigma(t, X_s) - \sigma(s, X_s)| ds dt \\
&\leq 2 \|\sigma\|_\infty \mathbf{E} \sum \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^t (b_s X_s)^2 (t-s) L(1 + |X_s|^\alpha) ds dt \\
&\leq 2 \|\sigma\|_\infty \varepsilon \mathbf{E} \sum \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} (b_s X_s)^2 L(1 + |X_s|^\alpha) ds dt \\
&= 2 \|\sigma\|_\infty \varepsilon^2 \mathbf{E} \sum \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} (b_s X_s)^2 L(1 + |X_s|^\alpha) ds \\
&= 2 \|\sigma\|_\infty \varepsilon^2 \mathbf{E} \int_0^T (b_s X_s)^2 L(1 + |X_s|^\alpha) ds,
\end{aligned}$$

donc est d'ordre $O(\varepsilon^2)$. ■

En utilisant la proposition 2.2.12 et l'équation (2.12) on obtient :

Corollaire 2.2.19

$$R(\varepsilon, H) = \mathbf{E} \sum_k \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^t e^{-2rs} b_s^2 \sigma^2(s, X_s) X_s^2 ds dt + r(\varepsilon),$$

où $r(\varepsilon)$ est d'ordre $o(\varepsilon)$, et si **(H2)** est vérifié, $r(\varepsilon)$ est d'ordre $O(\varepsilon^{3/2-\varepsilon})$, $\forall \varepsilon > 0$; si en plus (2.11) est vérifié, $r(\varepsilon)$ est d'ordre $O(\varepsilon^{3/2})$.

2.2.3 Un lemme d'analyse

Lemme 2.2.20 Soit f une fonction continue sur $[0, T[$ et telle que $\int_0^T |f(t)| dt < \infty$, et soit $\varepsilon = \frac{T}{N}$, alors quand $\varepsilon \rightarrow 0$, on a :

$$(i) \quad \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^t f(s) ds dt = \varepsilon \frac{1}{2} \int_0^T f(t) dt + \tilde{r}(\varepsilon), \quad (2.13)$$

où $\tilde{r}(\varepsilon)$ est d'ordre $o(\varepsilon)$.

(ii) Si, de plus, f est continument dérivable dans $]0, T[$, et s'il existe $0 < \alpha < 2$ tel que pour tout $t \in]0, T[$ on a :

$$|f'(t)| \leq \frac{C}{t^\alpha (T-t)^\alpha},$$

alors le $\tilde{r}(\varepsilon)$ est d'ordre

$$\begin{array}{ll} O(\varepsilon^2) & \text{si } 0 < \alpha < 1, \\ O(\varepsilon^2 \log \varepsilon^{-1}) & \text{si } \alpha = 1, \\ O(\varepsilon^{3-\alpha}) & \text{si } 1 < \alpha < 2. \end{array} \quad (2.14)$$

Démonstration : Nous commençons par prouver le lemme pour une fonction f continue sur un intervalle fermé $[0, T_0]$, avec $T_0 > 0$. Pour cela remarquons que :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^t f(s) ds dt \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t f(s) \right) ds (t - (k+1)\varepsilon) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} f(t) ((k+1)\varepsilon - t) dt, \end{aligned}$$

par une intégration par parties.

On écrit alors

$$\varepsilon \frac{1}{2} \int_0^T f(t) dt = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} f(t) \frac{1}{2} \varepsilon dt,$$

et en notant

$$\delta_\varepsilon = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^t f(s) ds dt - \varepsilon \frac{1}{2} \int_0^T f(t) dt,$$

on a

$$\delta_\varepsilon = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} f(t) \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) \varepsilon - t \right) dt. \quad (2.15)$$

En faisant le changement de variable $t \rightarrow (2k+1)\varepsilon - t$, de $[k\varepsilon, (k+1)\varepsilon)$ dans lui-même, on a

$$\delta_\varepsilon = - \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} f((2k+1)\varepsilon - t) \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) \varepsilon - t \right) dt, \quad (2.16)$$

(2.15) et (2.16) donnent que

$$\delta_\varepsilon = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} (f(t) - f((2k+1)\varepsilon - t)) \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) \varepsilon - t \right) dt \quad (2.17)$$

Comme f est continue sur $[0, T_0]$ donc uniformément continue sur $[0, T_0]$, $f(t) - f((2k+1)\varepsilon - t)$ tend vers 0 uniformément quand ε tend vers 0. On en déduit que le terme précédent est d'ordre $o(\varepsilon)$. Donc la première propriété est vraie si f est continue sur $[0, T_0]$.

Pour traiter le cas où f est continue sur $[0, T[$, on procède par troncation. Soit δ un réel positif et η assez petit de façon à avoir :

$$\int_{T-2\eta}^T |f(t)| dt \leq \delta,$$

alors :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^t f(s) ds dt \\ &= \sum_{k: (k+1)\varepsilon \leq T-\eta} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^t f(s) ds dt + \sum_{k: T-\eta < (k+1)\varepsilon \leq T} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^t f(s) ds dt. \end{aligned}$$

Comme f est continue sur $[0, T-\eta]$, et avec (2.17) en utilisant la uniforme continuité de f sur $[0, T-\eta]$, on peut réécrire le premier terme par, si ε est plus petit que η :

$$\frac{1}{2}\varepsilon \int_0^{T-\eta} f(t)dt + o(\varepsilon) + \varepsilon\delta.$$

De plus le deuxième terme de (2.18) est plus petit que :

$$\begin{aligned} & \sum_{k: T-\eta < (k+1)\varepsilon \leq T} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} |f(s)| ds dt \\ &= \varepsilon \int_{T-\eta}^T |f(t)| dt \leq \varepsilon\delta. \end{aligned}$$

On prend η et δ assez petit, et on conclut que (i) est vraie.

Pour démontrer (ii), on réécrit :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^t f(s) ds dt \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^t f(k\varepsilon) ds dt + \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^t (f(s) - f(k\varepsilon)) ds dt \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} f(k\varepsilon) dt + \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^t (f(s) - f(k\varepsilon)) ds dt \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} f(t) dt - \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} (f(t) - f(k\varepsilon)) dt \\ & \quad + \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^t (f(s) - f(k\varepsilon)) ds dt \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \int_0^T f(t) dt - \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} (f(t) - f(k\varepsilon)) dt \\ & \quad + \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^t (f(s) - f(k\varepsilon)) ds dt \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \int_0^T f(t) dt - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^\varepsilon (f(t) - f(0)) dt - \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=1}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^t f'(s) ds dt \\ & \quad + \int_0^\varepsilon \int_0^t (f(s) - f(0)) ds dt + \sum_{k=1}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^t \int_{k\varepsilon}^s f'(u) du ds dt \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\delta_\varepsilon &= -\frac{\varepsilon}{2} \int_0^\varepsilon (f(t) - f(0))dt - \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=1}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^t f'(s)dsdt \\ &\quad + \int_0^\varepsilon \int_0^t (f(s) - f(0))dsdt + \sum_{k=1}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^t \int_{k\varepsilon}^s f'(u)dudsdt.\end{aligned}$$

On divise l'intervalle $[0, T[$ en deux parties, $[0, T/2[$ et $[T/2, T[$. On divise

$$\delta_\varepsilon = \delta_\varepsilon^{(1)} + \delta_\varepsilon^{(2)},$$

avec

$$\begin{aligned}\delta_\varepsilon^{(1)} &= -\frac{\varepsilon}{2} \int_0^\varepsilon (f(t) - f(0))dt - \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k\varepsilon < T/2, k > 0} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^t f'(s)dsdt \\ &\quad + \int_0^\varepsilon \int_0^t (f(s) - f(0))dsdt + \sum_{k\varepsilon < T/2, k > 0} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^t \int_{k\varepsilon}^s f'(u)dudsdt \\ \delta_\varepsilon^{(2)} &= -\frac{\varepsilon}{2} \sum_{k\varepsilon \geq T/2} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^t f'(s)dsdt \\ &\quad + \sum_{k\varepsilon \geq T/2} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^t \int_{k\varepsilon}^s f'(u)dudsdt.\end{aligned}$$

Il suffit de montrer que $\delta_\varepsilon^{(1)}$ et $\delta_\varepsilon^{(2)}$ sont tous au plus d'ordre (2.14).

(a) On montre d'abord pour $\delta_\varepsilon^{(1)}$.

Comme $k\varepsilon < T/2$, supposons l'est aussi $(k+1)\varepsilon$. Donc pour tout k, t telle que $k\varepsilon < T/2$, $t \in [k\varepsilon, (k+1)\varepsilon[$, on a

$$|f'(t)| \leq \frac{1}{t^\alpha(T-t)^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha(T-T/2)^\alpha} \leq \frac{C}{t^\alpha} \quad (2.18)$$

– le cas $0 < \alpha < 1$.

On a

$$|\delta_\varepsilon^{(1)}| \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_0^\varepsilon \int_0^t f'(s)dsdt + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k\varepsilon < T/2, k > 0} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^t f'(s)dsdt$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^\varepsilon \int_0^t \int_0^s f'(u) du ds dt + \sum_{k\varepsilon < T/2, k > 0} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^t \int_{k\varepsilon}^s f'(u) du ds dt \\
& = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k\varepsilon < T/2} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^t \frac{1}{s^\alpha (T-s)^\alpha} ds dt \\
& \quad + \sum_{k\varepsilon < T/2} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^t \int_{k\varepsilon}^s \frac{1}{u^\alpha (T-u)^\alpha} du ds dt \\
& \leq C \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k\varepsilon < T/2} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \frac{1}{s^\alpha} ds dt \\
& \quad + C \sum_{k\varepsilon < T/2} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \frac{1}{u^\alpha} du ds dt \\
& \leq C \varepsilon^2 \int_0^T \frac{1}{t^\alpha} dt
\end{aligned}$$

Donc c'est d'ordre $O(\varepsilon^2)$.

– le cas $1 \leq \alpha < 2$.

On récrit

$$\delta_\varepsilon^{(1)} = A_1(\varepsilon) + A_2(\varepsilon),$$

avec

$$\begin{aligned}
A_1(\varepsilon) &= -\frac{\varepsilon}{2} \int_0^\varepsilon (f(t) - f(0)) dt + \int_0^\varepsilon \int_0^t (f(s) - f(0)) ds dt, \\
A_2(\varepsilon) &= -\frac{\varepsilon}{2} \sum_{k\varepsilon < T/2, k > 0} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^t f'(s) ds dt \\
&\quad + \sum_{k\varepsilon < T/2, k > 0} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^t \int_{k\varepsilon}^s f'(u) du ds dt.
\end{aligned}$$

$A_1(\varepsilon)$ est d'ordre $O(\varepsilon^2)$ puisque f est uniformément borné au voisinage de 0, parce que f est continue à droite à 0.

Pour $A_2(\varepsilon)$, on a

$$\begin{aligned}
|A_2(\varepsilon)| &\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k\varepsilon < T/2, k > 0} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^t |f'(s)| ds dt \\
&\quad + \sum_{k\varepsilon < T/2, k > 0} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^t \int_{k\varepsilon}^s |f'(u)| du ds dt
\end{aligned}$$

par (2.18), ceci est plus petit que

$$\begin{aligned}
& \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k\varepsilon < T/2, k > 0} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^t \frac{1}{s^\alpha} ds dt \\
& \quad + \sum_{k\varepsilon < T/2, k > 0} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^t \int_{k\varepsilon}^s \frac{1}{u^\alpha} du ds dt \\
& \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k\varepsilon < T/2, k > 0} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \frac{1}{(k\varepsilon)^\alpha} ds dt \\
& \quad + \sum_{k\varepsilon < T/2, k > 0} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \frac{1}{(k\varepsilon)^\alpha} du ds dt \\
& = \frac{3}{2} \varepsilon^3 \sum_{k\varepsilon < T/2, k > 0} \frac{1}{(k\varepsilon)^\alpha} \\
& = \frac{3}{2} \varepsilon^{3-\alpha} \sum_{k\varepsilon < T/2, k > 0} \frac{1}{k^\alpha},
\end{aligned}$$

donc pour $\alpha = 1$, c'est d'ordre $\varepsilon^2 \log \varepsilon^{-1}$, pour $1 < \alpha < 2$, c'est d'ordre $O(\varepsilon^{3-\alpha})$.

Donc $\delta_\varepsilon^{(1)}$ est d'ordre (2.14).

(b) On montre maintenant que $\delta_\varepsilon^{(2)}$ est au plus d'ordre (2.14).

Comme $k\varepsilon \geq T/2$, pour tout k, t telle que $k\varepsilon < T/2$, $t \in [k\varepsilon, (k+1)\varepsilon]$, on a

$$|f'(t)| \leq \frac{1}{t^\alpha (T-t)^\alpha} \leq \frac{1}{(T/2)^\alpha (T-t)^\alpha} \leq \frac{C}{(T-t)^\alpha}. \quad (2.19)$$

– le cas $0 < \alpha < 1$.

$$\begin{aligned}
|\delta_\varepsilon^{(2)}| & \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k\varepsilon \geq T/2} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^t \frac{1}{(T-s)^\alpha} ds dt \\
& \quad + \sum_{k\varepsilon \geq T/2} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^t \int_{k\varepsilon}^s \frac{1}{(T-u)^\alpha} du ds dt \\
& \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k\varepsilon \geq T/2} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \frac{1}{(T-t)^\alpha} ds dt \\
& \quad + \sum_{k\varepsilon \geq T/2} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \frac{1}{(T-t)^\alpha} du ds dt \\
& = \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{k\varepsilon \geq T/2} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \frac{1}{(T-t)^\alpha} dt + \varepsilon^2 \sum_{k\varepsilon \geq T/2} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \frac{1}{(T-t)^\alpha} dt
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{3}{2}\varepsilon^2 \int_0^T \frac{1}{(T-t)^\alpha} dt.$$

Donc c'est d'ordre $O(\varepsilon^2)$.

– On montre ensuite pour le cas $1 \leq \alpha < 2$.

On récrit

$$\delta_\varepsilon^{(2)} = B_1(\varepsilon) + B_2(\varepsilon),$$

avec

$$\begin{aligned} B_1(\varepsilon) &= -\frac{\varepsilon}{2} \int_{(N-1)\varepsilon}^T \int_{(N-1)\varepsilon}^t f'(s) ds dt + \int_{(N-1)\varepsilon}^T \int_{(N-1)\varepsilon}^t \int_{(N-1)\varepsilon}^s f'(u) du ds dt, \\ B_2(\varepsilon) &= -\frac{\varepsilon}{2} \sum_{k\varepsilon \geq T/2, k \leq N-2} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^t f'(s) ds dt \\ &\quad + \sum_{k\varepsilon \geq T/2, k \leq N-2} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^t \int_{k\varepsilon}^s f'(u) du ds dt. \end{aligned}$$

On a pour $|B_1(\varepsilon)|$ et $|B_2(\varepsilon)|$:

$$\begin{aligned} |B_1(\varepsilon)| &\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{(N-1)\varepsilon}^T \int_{(N-1)\varepsilon}^t \frac{1}{(T-s)^\alpha} ds dt \\ &\quad + \int_{(N-1)\varepsilon}^T \int_{(N-1)\varepsilon}^t \int_{(N-1)\varepsilon}^s \frac{1}{(T-u)^\alpha} du ds dt \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{(N-1)\varepsilon}^T \int_{(N-1)\varepsilon}^t \frac{1}{(T-s)^\alpha} ds dt \\ &\quad + \int_{(N-1)\varepsilon}^T \int_{(N-1)\varepsilon}^t \int_{(N-1)\varepsilon}^T \frac{1}{(T-s)^\alpha} du ds dt \\ &= \frac{3}{2}\varepsilon \int_{(N-1)\varepsilon}^T \int_{(N-1)\varepsilon}^t \frac{1}{(T-s)^\alpha} ds dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |B_2(\varepsilon)| &\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k\varepsilon \geq T/2, k \leq N-2} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^t \frac{1}{(T-s)^\alpha} ds dt \\ &\quad + \sum_{k\varepsilon \geq T/2, k \leq N-2} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^t \int_{k\varepsilon}^s \frac{1}{(T-u)^\alpha} du ds dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{k\varepsilon \geq T/2, k \leq N-2} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \frac{1}{(T - (k+1)\varepsilon)^\alpha} ds dt \\
&\quad + \sum_{k\varepsilon \geq T/2, k \leq N-2} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \frac{1}{(T - (k+1)\varepsilon)^\alpha} du ds dt \\
&= \frac{3}{2} \varepsilon^3 \sum_{k\varepsilon \geq T/2, k \leq N-2} \frac{1}{(T - (k+1)\varepsilon)^\alpha}.
\end{aligned}$$

– Pour $\alpha = 1$, $B_1(\varepsilon)$ est d'ordre $O(\varepsilon^2)$:

$$\begin{aligned}
|B_1(\varepsilon)| &\leq \frac{3}{2} \varepsilon \int_{(N-1)\varepsilon}^T \int_{(N-1)\varepsilon}^t \frac{1}{T-s} ds dt \\
&\leq \frac{3}{2} \varepsilon \int_0^\varepsilon (\log t - \log \varepsilon) dt \\
&= \frac{3}{2} \varepsilon^2 \log \varepsilon - \int_0^\varepsilon t d \log t - \frac{3}{2} \varepsilon^2 \log \varepsilon \\
&= \frac{3}{2} \varepsilon^2.
\end{aligned}$$

– Pour $1 < \alpha < 2$, $B_1(\varepsilon)$ est d'ordre $O(\varepsilon^{3-\alpha})$:

$$\begin{aligned}
|B_1(\varepsilon)| &\leq \frac{3}{2} \varepsilon \int_{(N-1)\varepsilon}^T \int_{(N-1)\varepsilon}^t \frac{1}{(T-s)^\alpha} ds dt \\
&= \frac{3}{2(\alpha-1)} \varepsilon \int_{(N-1)\varepsilon}^T \left(\frac{1}{(T-t)^{\alpha-1}} - \frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} \right) dt \\
&= \frac{3}{2(\alpha-1)(2-\alpha)} \varepsilon \int_{(N-1)\varepsilon}^T d(T-t)^{2-\alpha} - \frac{3}{2(\alpha-1)} \varepsilon^{3-\alpha} \\
&= \frac{3}{2(2-\alpha)} \varepsilon^{3-\alpha}
\end{aligned}$$

– Pour $\alpha = 1$, $B_2(\varepsilon)$ est d'ordre $O(\varepsilon^2 \log \varepsilon^{-1})$, et pour $1 < \alpha < 2$, $B_2(\varepsilon)$ est d'ordre $O(\varepsilon^{3-\alpha})$:

$$\begin{aligned}
|B_2(\varepsilon)| &\leq \frac{3}{2} \varepsilon^3 \sum_{k=0}^{N-2} \frac{1}{(T - (k+1)\varepsilon)^\alpha} \\
&= \frac{3}{2} \varepsilon^{3-\alpha} \sum_{k=0}^{N-2} \frac{1}{(N - (k+1)\varepsilon)^\alpha} \\
&= \frac{3}{2} \varepsilon^{3-\alpha} \sum_{m=1}^{N-1} \frac{1}{m^\alpha},
\end{aligned}$$

donc pour $\alpha = 1$, c'est d'ordre $O(\varepsilon^2 \log \varepsilon^{-1})$, pour $1 < \alpha < 2$, c'est d'ordre $O(\varepsilon^{3-\alpha})$.

Par les ordres de grandeur de $B_1(\varepsilon)$ et $B_2(\varepsilon)$, on a $\delta_\varepsilon^{(2)}$ est d'ordre (2.14).

Ainsi se termine la démonstration de (ii) du lemme. ■

2.2.4 Quelques propriétés de H_t

Nous montrons d'abord que l'on peut intervertir la dérivation et l'espérance dans la formule (1.12). Ensuite nous donnons quelques propriétés de H_t que nous allons utiliser un peu plus tard.

Rappelons, un théorème de flot pour les équations différentielles stochastiques dans le cadre multi-dimensionnel :

Théorème 2.2.21 *Soit X_t^x la solution de l'équation (1.3), issue de x en 0, avec σ satisfait la condition dans section 1.1, alors il existe une modification de X_t^x tel que pour p.s. tout ω , la fonction $x \rightarrow X_t^x$ est un C^∞ difféomorphisme. De plus, $Y_t = \left(\frac{\partial X_t^{i,x}}{\partial x_j} \right)_{i,j=1..d}$ satisfait l'équation :*

$$Y_t = I + \int_0^t r Y_s ds + \int_0^t \sum_{k=1}^d (I_{X_s} \sigma_s)'_k Y_s dW_s^k,$$

où

$$(I_x \sigma(t, x))'_k = \left(\frac{\partial x_i \sigma_{i,k}(t, x)}{\partial x_j} \right)_{i,j=1..d}.$$

On peut consulter à ce sujet [IW89], chapitre V. Dans le cas de la dimension 1, le processus $(Y_t, t \geq 0)$ prend la forme :

$$\frac{\partial X_t^x}{\partial x} = \exp \left(\int_0^t (\sigma_s + X_s \sigma'_s) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t (\sigma_s + X_s \sigma'_s)^2 ds + rt \right), \quad (2.20)$$

avec $\sigma_s = \sigma(s, X_s^x)$ et $\sigma'_s = \sigma'(s, X_s^x)$.

Le lemme suivant permet d'obtenir des estimations sur les dérivés de $X_T^{t,x}$:

Lemme 2.2.22 *Pour tout x dans un domaine borné K de \mathbf{R} , et si $p > 1, m \geq 0$, on a*

$$\sup_{x \in K} \mathbf{E} \left(\left| \frac{\partial^m X_T^{t,x}}{\partial x^m} \right|^p \right) < \infty.$$

Démonstration : Le cas $m = 0$, le lemme est évident. Nous prouvons ce lemme en détail dans la cas où $m = 1$ et $d = 1$. Pour les cas où $m > 1$ et de dimension supérieure, la démonstration est analogue.

On suppose sans perdre la généralité que $t = 0$. En utilisant le théorème 2.2.21 on obtient que $\frac{\partial X_t^x}{\partial x}$ satisfait l'équation pour $0 \leq t \leq T$:

$$Y_t = 1 + \int_0^t r Y_s ds + \int_0^t (\sigma_s + X_s \sigma'_s) Y_s dW_s.$$

On en déduit que :

$$|Y_t|^p \leq C_1 + C_2 \left| \int_0^t r Y_s ds \right|^p + C_3 \left| \int_0^t (\sigma_s + X_s \sigma'_s) Y_s dW_s \right|^p.$$

Donc, en prenant l'espérance on obtient :

$$\mathbf{E}|Y_t|^p \leq C_1 + C_2 \mathbf{E} \left| \int_0^t r Y_s ds \right|^p + C_3 \mathbf{E} \left| \int_0^t (\sigma_s + X_s \sigma'_s) Y_s dW_s \right|^p$$

Puis en utilisant l'inégalité de Hölder et de Burkholder-Davis-Gundy, on en déduit que :

$$\mathbf{E}|Y_t|^p \leq C_1 + C'_2 \mathbf{E} \int_0^t |Y_s|^p ds + C'_3 \mathbf{E} \int_0^t |(\sigma_s + X_s \sigma'_s) Y_s|^p ds.$$

Comme $\sigma_s + X_s \sigma'_s$ est borné uniformément, on a :

$$\mathbf{E}|Y_t|^p \leq C_1 + C_4 \int_0^t \mathbf{E}|Y_s|^p ds.$$

Toutes les constantes étant positives et indépendantes de t , on obtient à l'aide du lemme de Gronwall :

$$\mathbf{E}|Y_t|^p \leq C_1 e^{C_4 t},$$

donc $\mathbf{E}(|\frac{\partial X_T^x}{\partial x}|^p)$ est borné uniformément. ■

On rappelle la *propriété de cône* :

On dit qu'une zone Ω dans \mathbf{R}^d a la propriété de cône si chaque point de Ω est le sommet d'un cône contenue dans la fermeture de Ω . Le cône étant représenté par

$$x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 < b x_n^2, \quad 0 < x_n < a,$$

a, b sont des constantes.

Rappelons, maintenant, l'inégalité de Sobolev suivante (Voir Adams [Ada75]) :

Lemme 2.2.23 *Soit Ω un domaine de \mathbf{R}^d ayant la propriété de cône, si $mp > d$, alors l'injection*

$$W^{m,p}(\Omega) \rightarrow C_b^0(\Omega)$$

est continue. De plus la norme de l'injection canonique ne dépend que de m, p, d et Ω .

La proposition suivante permet de justifier l'échange de la dérivation et de l'espérance.

Proposition 2.2.24 *Soit f satisfaisant l'hypothèse (H1) et si $X_s^{t,x}$ la solution de l'équation (2.1) issue de x à l'instant t , on a :*

$$H(t, x) = \mathbf{E} \left(e^{-r(T-t)} \frac{\partial}{\partial x} f(X_T^{t,x}) \right). \quad (2.21)$$

De plus, si $(\overline{W}_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien sous certaine probabilité \mathbf{Q} , et si $\overline{X}^{t,x}$ est la solution unique de :

$$\frac{d\overline{X}_s}{\overline{X}_s} = (r + \sigma(s, \overline{X}_s) (\sigma(s, \overline{X}_s) + \overline{X}_s \sigma'(s, \overline{X}_s))) ds + \sigma(s, \overline{X}_s) d\overline{W}_s,$$

issue de x en t , alors on a aussi :

$$H(t, x) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(f'(\overline{X}_T^{t,x}) \right). \quad (2.22)$$

Enfin si $\overline{\mathbf{P}}$ est la probabilité équivalente à \mathbf{P} de densité donnée par :

$$\frac{d\overline{\mathbf{P}}}{d\mathbf{P}} = \exp \left(\int_0^T (\sigma_s + X_s \sigma'_s) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T (\sigma_s + X_s \sigma'_s)^2 ds \right).$$

où $\sigma_s = \sigma(s, X_s)$ et $\sigma'_s = \sigma'(s, X_s)$, on a :

$$H(t, X_t) = \overline{\mathbf{E}} (f'(X_T) | \mathcal{F}_t).$$

Démonstration : Démontrons d'abord le résultat pour f dans $C^1(\mathbf{R})$. Soit V_x une boule ouverte de centre x (qui satisfait donc la propriété de cône). Comme $|f'(x)| \leq L(1 + |x|^\alpha)$, on a :

$$\mathbf{E} \left(\sup_{y \in V_x} \left| f'(X_t^y) \frac{\partial X_t^y}{\partial x} \right| \right) \leq \mathbf{E} \left(\sup_{y \in V_x} \left| L(1 + (X_t^y)^\alpha) \frac{\partial X_t^y}{\partial x} \right| \right)$$

Comme $d = 1$, en prenant $m = 1$, $p = 2$ et en utilisant l'inégalité de Sobolev précédente on obtient :

$$\mathbf{E} \left(\sup_{y \in V_x} \left| f'(X_t^y) \frac{\partial X_t^y}{\partial x} \right| \right) \leq C \mathbf{E} \left(\left\| (1 + (X_t^y)^\alpha) \frac{\partial X_t^y}{\partial x} \right\|_{W^{2,1}(V_x)} \right).$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et le lemme 2.2.22, on en déduit que :

$$\mathbf{E} \left(\left\| (1 + (X_t^y)^\alpha) \frac{\partial X_t^y}{\partial x} \right\|_{W^{2,1}(V_x)} \right) < \infty,$$

puis que :

$$\mathbf{E} \left(\sup_{y \in V_x} \left| f'(X_t^y) \frac{\partial X_t^y}{\partial x} \right| \right) < \infty.$$

On peut alors appliquer le théorème de Lebesgue, pour intervertir l'espérance et la dérivation, on obtient alors :

$$\begin{aligned} H(t, x) &= \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{E} (e^{-r(T-t)} f(X_T^{t,x})) \\ &= \mathbf{E} \left(e^{-r(T-t)} \frac{\partial}{\partial x} f(X_T^{t,x}) \right) \\ &= \mathbf{E} \left(e^{-r(T-t)} f'(X_T^{t,x}) \frac{\partial}{\partial x} X_T^{t,x} \right). \end{aligned}$$

Or l'on a vu (voir l'équation (2.20)) que :

$$\frac{\partial X_T^{t,x}}{\partial x} = \exp \left(\int_t^T (\sigma_s^{t,x} + X_s^{t,x} \sigma_s'^{t,x}) dW_s - \frac{1}{2} \int_t^T (\sigma_s^{t,x} + X_s^{t,x} \sigma_s'^{t,x})^2 ds + r(T-t) \right),$$

avec $\sigma_s^{t,x} = \sigma(s, X_s^{t,x})$ et $\sigma_s'^{t,x} = \sigma'(s, X_s^{t,x})$, on obtient donc :

$$H(t, x) = \mathbf{E} \left(f'(X_T^{t,x}) \exp \left(\int_t^T (\sigma_s^{t,x} + X_s^{t,x} \sigma_s'^{t,x}) dW_s - \frac{1}{2} \int_t^T (\sigma_s^{t,x} + X_s^{t,x} \sigma_s'^{t,x})^2 ds \right) \right).$$

Maintenant en utilisant le théorème de Girsanov, pour le changement de probabilité de \mathbf{P} à $\overline{\mathbf{P}}^{t,x}$ défini par :

$$\frac{d\overline{\mathbf{P}}^{t,x}}{d\mathbf{P}} = \exp \left(\int_t^T (\sigma_s^{t,x} + X_s^{t,x} \sigma_s'^{t,x}) dW_s - \frac{1}{2} \int_t^T (\sigma_s^{t,x} + X_s^{t,x} \sigma_s'^{t,x})^2 ds \right),$$

on obtient :

$$H(t, x) = \overline{\mathbf{E}}^{t,x} (f'(X_T^{t,x})).$$

Mais sous la probabilité $\overline{\mathbf{P}}^{t,x}$, si on pose :

$$\overline{W}_s^{t,x} = W_s - W_t - \int_t^s (\sigma_s^{t,x} + X_s^{t,x} \sigma_s'^{t,x}) ds,$$

$(\overline{W}_s^{t,x}, s \geq t)$ est un mouvement brownien, et $X^{t,x}$ est justement la solution forte unique de :

$$\frac{dX_s}{X_s} = (r + \sigma(s, X_s) (\sigma(s, X_s) + X_s \sigma'(s, X_s))) ds + \sigma(s, X_s) d\overline{W}_s^{t,x},$$

issue de x en t . Comme la loi de $X^{t,x}$ sous $\overline{\mathbf{P}}^{t,x}$ est la même que $\overline{X}^{t,x}$ sous \mathbf{Q} , on obtient (2.22) pour une fonction f de classe C^1 .

Nous allons maintenant montrer que les deux premiers résultats sont vrais pour tout f satisfaisant **(H1)**. Pour cela commençons par noter que comme f satisfait (2.3), si :

$$\phi_\eta(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\eta}}}{\sqrt{2\eta}},$$

on a

$$f_\eta = f * \phi_\eta \rightarrow f, \text{ quand } \eta \rightarrow 0.$$

Les fonctions f_η sont de classe C^∞ , et on peut donc appliquer le résultat précédent pour f_η . Si :

$$F_\eta(t, x) = e^{-r(T-t)} \mathbf{E}(f_\eta(X_T^{t,x})),$$

on a, en utilisant (1.11) :

$$F_\eta(t, x) = e^{-r(T-t)} \int_{\mathbf{R}} f_\eta(e^y) p(t, T; \log x, y) dy,$$

si $p(t, T, y_1, y_2)$ est le noyau de transition de du processus $\log(X_t)$.

On en déduit donc que :

$$H_\eta(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} F_\eta(t, x) = e^{-r(T-t)} \int_{\mathbf{R}} f_\eta(e^y) \frac{\partial}{\partial x} p(t, T; \log x, y) dy.$$

On justifie le passage à la limite en utilisant l'estimation de $\frac{\partial p}{\partial x}$ contenu dans le théorème 1.3.3. On obtient de même que :

$$H(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} F(t, x) = e^{-r(T-t)} \int_{\mathbf{R}} f(e^y) \frac{\partial}{\partial x} p(t, T; \log x, y) dy.$$

En utilisant l'estimation de $\frac{\partial p}{\partial x}$, le fait que f_η converge vers f et en appliquant théorème de convergence de Lebesgue on obtient que $H_\eta(t, x)$ converge vers $H(t, x)$ pour (t, x) fixé, quand η tend vers zéro.

De plus, comme f_η est C^∞ , on vient de voir que :

$$H_\eta(t, x) = \overline{\mathbf{E}}(f'_\eta(X_T^{t,x})).$$

Si on note q la probabilité de transfert de $\log X_t$ sous $\overline{\mathbf{P}}$, alors on a

$$\begin{aligned}
H_\eta(t, x) &= \overline{\mathbf{E}} \left(f'_\eta(e^{\log X_T^{t,x}}) \right) \\
&= \int_{\mathbf{R}} f'_\eta(e^y) q(t, T; \log x, y) dy \\
&= \int_{\mathbf{R}} q(t, T; \log x, y) e^{-y} df_\eta(e^y) \\
&= \int_{\mathbf{R}} f_\eta(e^y) d(q(t, T; \log x, y) e^{-y})
\end{aligned}$$

puisque $\left| \frac{\partial q}{\partial y}(t, T; \log x, y) \right|$ est d'ordre e^{-cy^2} d'après théorème 1.3.3, et f_η tend vers f quand η tend vers zéro, alors $H_\eta(t, x)$ tend vers

$$\int_{\mathbf{R}} f(e^y) d(q(t, T; \log x, y) e^{-y}),$$

et comme f est absolument continue, en effectuant de nouveau une intégration par partie, ceci peut s'écrire :

$$\int_{\mathbf{R}} q(t, T; \log x, y) e^{-y} df(e^y) = \int_{\mathbf{R}} f'(e^y) q(t, T; \log x, y) dy.$$

La définition de q , prouve alors que :

$$\int_{\mathbf{R}} f'(e^y) q(t, T; \log x, y) dy = \overline{\mathbf{E}} \left(f'(X_T^{t,x}) \right),$$

donc $H_\eta(t, x)$ tend vers $\overline{\mathbf{E}} \left(f'(X_T^{t,x}) \right)$. Or on a vu que $H_\eta(t, x)$ tend vers $H(t, x)$ quand η tend vers zéro, d'où :

$$H_\eta(t, x) = \overline{\mathbf{E}} \left(f'(X_T^{t,x}) \right).$$

La troisième propriété s'obtient en remarquant que :

$$\overline{\mathbf{E}}(f'(X_T) | \mathcal{F}_t) = \mathbf{E} \left(f'(X_T) \exp \left(\int_t^T (\sigma_s + X_s \sigma'_s) dW_s - \frac{1}{2} \int_t^T (\sigma_s + X_s \sigma'_s)^2 ds \right) | \mathcal{F}_t \right),$$

avec $\sigma_s = \sigma(s, X_s)$ et $\sigma'_s = \sigma'(s, X_s)$. Et en utilisant la propriété de Markov pour le processus $(X_t, t \geq 0)$. ■

Corollaire 2.2.25 *Soit \mathbf{Q} une probabilité fortement équivalente à \mathbf{P} alors :*

$$\lim_{t \rightarrow T} H(t, X_t) = H(T, X_T) \quad p.s \text{ et dans } L^p(\mathbf{Q}), \text{ pour tout } p > 1$$

Démonstration : On vient de voir que $H_t = H(t, X_t)$ s'écrit sous la forme :

$$H_t = \overline{\mathbf{E}}(f'(X_T) | \mathcal{F}_t),$$

donc H_t est une $\overline{\mathbf{P}}$ -martingale, et H_T est dans $L^p(\mathbf{Q})$, pour tout $p > 1$, donc H_t est dans $L^p(\mathbf{Q})$ et pour p fixé, $|H_t|^p$ sont uniformément intégrable pour tout t . Donc on a la convergence p.s. et $L^p(\overline{\mathbf{P}})$. On en déduit le même type de convergence pour toute probabilité fortement équivalente à $\overline{\mathbf{P}}$ et donc à \mathbf{P} . ■

La proposition suivante assure qu'on peut appliquer la formule d'Ito à la fonction $H(t, x)$:

Proposition 2.2.26 *Si la fonction f satisfait (H1) , alors $H(t, x)$ est de classe $C^{1,\infty}([0, T[\times \mathbf{R}^{+*})$, et satisfait l'équation aux dérivées partielles suivante :*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + Au + (\sigma^2 + x\sigma\sigma')x \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & \text{pour } (t, x) \in [0, T[\times \mathbf{R}^{+*}, \\ \lim_{t \rightarrow T} u(t, x) = f'(x) & \text{si } x \text{ est un point de continuité de } f'. \end{cases} \quad (2.23)$$

Démonstration : Par la proposition 2.2.24, on a :

$$H(t, x) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(f'(X_T^{t,x})),$$

et sous \mathbf{Q} , $X_s^{t,x}$ est la solution unique de :

$$\frac{dX_s}{X_s} = (r + \sigma(s, X_s)(\sigma(s, X_s) + X_s\sigma(s, X_s))) ds + \sigma(s, X_s) d\overline{W}_s,$$

issue de s en t . On en déduit que $H(t, x)$ satisfait l'équation (2.23). ■

Remarque 2.2.27 On vient de voir que sous $\overline{\mathbf{P}}$, $H(t, X_t)$ est une martingale, par lemme 2.2.3, on a $H_t \in \mathcal{M}^2(\overline{\mathbf{P}})$. Comme on a $\mathbf{P} \simeq \overline{\mathbf{P}}$, donc $\mathcal{M}^2(\mathbf{P}) = \mathcal{M}^2(\overline{\mathbf{P}})$, donc $H_t \in \mathcal{M}^2(\mathbf{P})$.

De plus comme on peut appliquer la formule d'Ito à la fonction $H(t, x)$ on en déduit que :

$$dH(t, X_t) = \frac{\partial H(t, X_t)}{\partial x} X_t \sigma_t d\overline{W}_t = \frac{\partial H(t, X_t)}{\partial x} X_t \sigma_t (dW_t - (\sigma_s + X_s \sigma'_s) ds). \quad (2.24)$$

avec :

$$\overline{W}_t = W_t - \int_0^t (\sigma_s + X_s \sigma'_s) ds,$$

qui est un mouvement brownien sous $\overline{\mathbf{P}}$.

On démontre maintenant quelques lemmes techniques utiles. Ce premier lemme est classique et nous ne le démontrons pas.

Lemme 2.2.28 *pour tout $\alpha, x > 0$, σ sous condition (\mathbf{A}) , on a :*

$$\sup_{0 \leq t \leq s \leq T} \mathbf{E} |X_s^{t,x}|^\alpha < C(T, \alpha) x^\alpha.$$

Nous aurons besoin d'un lemme permettant de contrôler le comportement de la couverture en x .

Lemme 2.2.29 *il existe L' positives tel que pour tout $t > 0$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a :*

$$|H(t, x)| \leq L'(1 + |x|^\alpha),$$

avec le même α que celui intervenant dans $(\mathbf{H1})$.

Démonstration : En utilisant la proposition 2.2.24, on obtient :

$$H(t, X_t) = \overline{\mathbf{E}} \left(f'(X_T^{t,x}) \right),$$

et par $(\mathbf{H1})$, $|f'(x)| \leq L(1 + |x|^\alpha)$, $\lambda - p.s.$ $x \in \mathbf{R}$, et comme la loi de la variable aléatoire $X_T^{t,x}$ admet un densité par rapport à la mesure de Lebesgue, on en déduit que :

$$|f'(X_T^{t,x})| \leq L(1 + |X_T^{t,x}|^\alpha) \quad \mathbf{P} - p.s.,$$

on peut alors conclure en utilisant le lemme 2.2.28. ■

On a un autre lemme que l'on utilisera plus tard.

Lemme 2.2.30 *Si l'hypothèse $(\mathbf{H2})$ est vérifiée, et si la fonction qui définit l'actif contingent f est deux fois continument dérivable avec :*

$$|f''(x)| \leq L(1 + |x|^\alpha), \tag{2.25}$$

alors

$$\left| \frac{\partial H(t, x)}{\partial x} \right| \leq C(1 + |x|^\alpha), \tag{2.26}$$

et $\frac{\partial H(t, X_t)}{\partial x}, \frac{\partial H(t, X_t)}{\partial x} X_t \sigma_t, \frac{\partial H(t, X_t)}{\partial x} X_t^2 \sigma_t$ sont dans $\mathcal{M}^2(\mathbf{P})$.

Démonstration : Par la proposition 2.2.24, on a

$$H(t, x) = \overline{\mathbf{E}} \left(f'(X_T^{t,x}) \right),$$

avec, sous la probabilité $\overline{\mathbf{P}}$, $X^{t,x}$ qui est la solution unique de l'équation différentielle stochastique :

$$\frac{dX_t}{X_t} = \alpha_1(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)d\overline{W}_t, \quad (2.27)$$

où $\alpha_1(t, x) = r + \sigma(t, x)(\sigma(t, x) + x\sigma'(t, x))$. En utilisant (2.20), on en déduit que la dérivée de $X_s^{t,x}$ par rapport à x satisfait l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\frac{dY_s}{Y_s} = \beta_2(s, X_s^{t,x})d\overline{W}_s + \alpha_2(s, X_s^{t,x})ds$$

avec :

$$\alpha_2(t, x) = r + (\sigma(t, x) + x\sigma'(t, x))^2 + \sigma(t, x)x(2\sigma'(t, x) + x\sigma''(t, x)),$$

et $\beta_2(t, x) = \sigma(t, x) + x\sigma'(t, x)$. On en déduit que :

$$\frac{\partial X_T^{t,x}}{\partial x} = \exp \left(\int_t^T \beta_2(s, X_s^{t,x})d\overline{W}_s - \frac{1}{2} \int_t^T \beta_2(s, X_s^{t,x})^2 ds + \int_t^T \alpha_2(s, X_s^{t,x})ds \right).$$

On peut alors prouver, en utilisant la régularité de f que :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial H(t, x)}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \overline{\mathbf{E}} \left(f'(X_T^{t,x}) \right) \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} &= \overline{\mathbf{E}} \left(f''(X_T^{t,x}) \frac{\partial X_T^{t,x}}{\partial x} \right) \\ &= \overline{\mathbf{E}} f''(X_T^{t,x}) e^{\int_t^T \beta_2(s, X_s^{t,x})d\overline{W}_s - \frac{1}{2} \int_t^T \beta_2(s, X_s^{t,x})^2 ds + \int_t^T \alpha_2(s, X_s^{t,x})ds} \end{aligned} \quad (2.29)$$

On fait, alors, un nouveau changement de probabilité $\overline{\overline{\mathbf{P}}}$ dont la densité par rapport à $\overline{\mathbf{P}}$ est telle que sous $\overline{\overline{\mathbf{P}}}$:

$$d\overline{\overline{W}}_t = d\overline{W}_t - (\sigma_t + \sigma'_t X_t)dt \quad (2.30)$$

est un mouvement brownien. Alors, sous $\overline{\overline{\mathbf{P}}}$, on peut facilement vérifier que :

$$\frac{\partial H(t, X_t)}{\partial x} = \overline{\overline{\mathbf{E}}} \left(f''(X_T) e^{\int_t^T ((\sigma_s + \sigma'_s X_s)^2 + \sigma_s X_s (2\sigma'_s + \sigma''_s X_s) + r) ds} \middle| \mathcal{F}_t \right), \quad (2.31)$$

avec :

$$\begin{aligned} b_t &= (\sigma_t + \sigma'_t X_t)^2 + \sigma_t X_t (2\sigma'_t + \sigma''_t X_t) + r, \\ \beta_t &= e^{\int_0^t b_s ds}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Remarquons que β_t est uniformément borné et que l'on a :

$$\frac{\partial H(t, X_t)}{\partial x} \beta_t = \overline{\overline{\mathbf{E}}} (f''(X_T) \beta_T | \mathcal{F}_t),$$

c'est donc une martingale continue. De plus, comme β_t est uniformément borné, et vu l'hypothèse (2.25), on a :

$$\left| \frac{\partial H_T}{\partial x} \beta_T \right| \leq C(1 + |X_T|^\alpha), \quad (2.33)$$

d'où (2.26).

On en déduit que $\frac{\partial H_T}{\partial x} \beta_T$ est dans tout $L^p(\mathbf{P})$ puis, dans tout $L^p(\Omega, \overline{\overline{\mathbf{P}}})$. Alors, en utilisant le lemme 2.2.3, on voit que $\frac{\partial H(t, X_t)}{\partial x} \beta_t \in \mathcal{M}^2(\mathbf{P})$. Et comme β_t^{-1} est dans $\mathcal{M}^2(\mathbf{P})$ et est à variation bornée, il est dans $\mathcal{N}^2(\mathbf{P})$. Le lemme 2.2.7 permet alors d'affirmer que $\frac{\partial H(t, X_t)}{\partial x} = \beta_t \beta_t^{-1} \frac{\partial H(t, X_t)}{\partial x}$ est dans $\mathcal{M}^2(\mathbf{P})$.

Enfin en utilisant l'hypothèse **(H2)**, on peut vérifier que les processus σ et X sont dans $\mathcal{N}^2(\mathbf{P})$, donc $\frac{\partial H_t}{\partial x} X_t \sigma_t$ et $\frac{\partial H_t}{\partial x} X_t^2 \sigma_t$ sont aussi dans $\mathcal{M}^2(\mathbf{P})$. ■

On établit, alors, le lemme suivant qui nous permettra d'estimer le risque résiduel.

Proposition 2.2.31 *Sous l'hypothèse **(H1)**, et si β est un nombre réel strictement positif on a :*

$$\mathbf{E} \left(\left(\int_0^T \left(X_t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, X_t) \right)^2 dt \right)^{1+\beta} \right) < \infty. \quad (2.34)$$

Démonstration : En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on voit que la preuve de (2.34) est équivalente au même résultat sous la probabilité $\overline{\overline{\mathbf{P}}}$. On va donc montrer que pour tout β strictement positif on a :

$$\overline{\overline{\mathbf{E}}} \left(\left(\int_0^T \left(X_t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, X_t) \right)^2 dt \right)^{1+\beta} \right) < \infty. \quad (2.35)$$

Pour cela, on commence par majorer, pour $t < T$:

$$\overline{\mathbf{E}} \left(\left(\int_0^t \left(X_s \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s, X_s) \right)^2 ds \right)^{1+\beta} \right). \quad (2.36)$$

En utilisant l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy on obtient :

$$\begin{aligned} & \overline{\mathbf{E}} \left(\left(\int_0^t \left(X_s \sigma(s, X_s) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s, X_s) \right)^2 ds \right)^{1+\beta} \right) \\ & \leq \overline{C} \mathbf{E} \left(\sup_{0 \leq u \leq t} \left| \int_0^u X_s \sigma(s, X_s) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s, X_s) d\overline{W}_s \right|^{2+2\beta} \right) \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$= \overline{C} \mathbf{E} \left(\sup_{0 \leq u \leq t} \left| \int_0^u X_s \sigma(s, X_s) \frac{\partial H}{\partial x}(s, X_s) d\overline{W}_s \right|^{2+2\beta} \right), \quad (2.38)$$

puisque $H_s = \frac{\partial F}{\partial x}(s, X_s)$.

D'autre part, en utilisant (2.24), on sait que H_t est une $\overline{\mathbf{P}}$ martingale et que :

$$\begin{aligned} H_t &= H_0 + \int_0^t \frac{\partial H_s}{\partial x} X_s \sigma_s d\overline{W}_s \\ &= \overline{\mathbf{E}} H_t + \int_0^t \frac{\partial H_s}{\partial x} X_s \sigma_s d\overline{W}_s. \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\int_0^t \frac{\partial H_s}{\partial x} X_s \sigma(s, X_s) d\overline{W}_s = H_t - \overline{\mathbf{E}} H_t.$$

D'où :

$$\overline{\mathbf{E}} \left(\sup_{0 \leq u \leq t} \left| \int_0^u \frac{\partial H}{\partial x}(s, X_s) X_s \sigma(s, X_s) d\overline{W}_s \right|^{2+2\beta} \right) \leq \overline{\mathbf{E}} \sup_{0 \leq u \leq t} |H_u - \overline{\mathbf{E}} H_u|^{2+2\beta} \leq C \overline{\mathbf{E}} \sup_{0 \leq u \leq t} |H_u|^{2+2\beta}. \quad (2.39)$$

Donc, en utilisant les équations (2.38) et (2.39) on obtient :

$$\overline{\mathbf{E}} \left(\left(\int_0^t \left(X_s \sigma(s, X_s) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s, X_s) \right)^2 ds \right)^{1+\beta} \right) \leq C \overline{\mathbf{E}} \sup_{0 \leq u \leq t} |H_u|^{2+2\beta},$$

avec C indépendant de t . Par lemme 2.2.29, le membre de droite est plus petit que :

$$CL' \overline{\mathbf{E}} \sup_{0 \leq u \leq t} (1 + |X_u|^\alpha).$$

Or $\overline{\mathbf{E}} \sup_{0 \leq u \leq t} |X_u|^\alpha$ est uniformément borné pour tout $t \in [0, T]$ par l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy, donc (2.36) est borné uniformément pour tout $t < T$. On en déduit comme, de plus, $\sigma(t, x)$ est bornée inférieurement que :

$$\overline{\mathbf{E}} \left(\left(\int_0^t \left(X_s \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s, X_s) \right)^2 ds \right)^{1+\beta} \right) < +\infty.$$

On en déduit l'inégalité (2.34). ■

On étend maintenant légèrement ce résultat.

Corollaire 2.2.32 *Sous l'hypothèse (H1) , si a est un réel positif, si β est un réel strictement positif, on a :*

$$\mathbf{E} \left(\left(\int_0^T |X_t|^a \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, X_t) \right)^2 dt \right)^{1+\beta} \right) < \infty.$$

Démonstration : On remarque que :

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left(\left(\int_0^T |X_t|^{a-2} \left(X_t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, X_t) \right)^2 dt \right)^{1+\beta} \right) \\ & \leq \mathbf{E} \left(\left(\int_0^T \sup_{t \leq T} (|X_t|^{a-2}) \left(X_t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, X_t) \right)^2 dt \right)^{1+\beta} \right) \\ & \leq \mathbf{E} \left(\sup_{t \leq T} (|X_t|^{a-2}) \left(\int_0^T \left(X_t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, X_t) \right)^2 dt \right)^{1+\beta} \right) \end{aligned}$$

et l'on conclut en utilisant le lemme 2.2.28 et la proposition 2.2.31. ■

Remarque 2.2.33 On peut déduire de ce résultat que $H \in \mathcal{M}^2(\mathbf{P})$ sur $[0, T]$.

Propriété et évaluation de $\frac{\partial H}{\partial x}$ et $g(t)$

On étudie dans cette partie $\frac{\partial H}{\partial x}$ et $g(t)$, qui permet de vérifier les hypothèses **(H3)** et **(H4)** dans des applications.

Lemme 2.2.34 *Pour tout $0 \leq t < T$, on a*

$$\left| \frac{\partial H(t, x)}{\partial x} \right| \leq C \frac{1 + |x|^\alpha}{x\sqrt{T-t}}.$$

avec α dans (2.3).

Démonstration : En utilisant la 2.2.24, on a :

$$H(t, x) = \bar{\mathbf{E}}^{t,x} (f'(X_T^{t,x})).$$

De plus à l'aide du théorème 1.3.3 (ii) $H(t, x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$H(t, x) = \int_{\mathbf{R}} f'(e^y) p(t, T; \log x, y) dy,$$

p est le noyau de transition de $\log X_T$ sous $\bar{\mathbf{P}}^{t,x}$. Donc, en dérivant, on obtient :

$$\frac{\partial H_t}{\partial x} = \int_{\mathbf{R}} f'(e^y) \frac{\partial}{\partial x} p(t, T; \log x, y) dy,$$

de plus l'hypothèse **(H1)** prouve que :

$$|f'(e^y)| \leq L(1 + e^{\alpha y}),$$

et le théorème 1.3.3(i) que :

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} p(t, T; \log x, y) \right| \leq \frac{C}{x(T-t)} \exp(-c \frac{|\log x - y|^2}{T-t}).$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial H_t}{\partial x} \right| &\leq \int_{\mathbf{R}} L(1 + e^{\alpha y}) \frac{C}{x(T-t)} \exp(-c \frac{|\log x - y|^2}{T-t}) \\ &\leq \frac{C}{x(T-t)} \int_{\mathbf{R}} L(1 + x^\alpha e^{\alpha z}) \exp(-c \frac{z^2}{T-t}) dz \\ &\leq C \frac{1 + x^\alpha}{x\sqrt{T-t}}. \end{aligned}$$

■

Lemme 2.2.35 *Si l'hypothèse (H2) est vérifiée, et si la fonction qui définit l'actif contingent f est deux fois continument dérivable avec :*

$$|f''(x)| \leq L(1 + |x|^\alpha),$$

alors on a

$$\left| \frac{\partial H}{\partial x}(t, x) \right| \leq C(1 + |x|^\alpha).$$

La démonstration est de même que pour lemme 2.2.29.

g étant défini dans (2.6).

On a les résultats suivants :

Lemme 2.2.36 *$g(t)$ est continue et intégrable sur $[0, T[$.*

Démonstration : Par lemme 2.2.34 et le théorème de convergence dominée, $g(t)$ est continue sur $[0, T[$.

$g(t)$ est intégrable sur $[0, T[$ est la conséquence du corollaire 2.2.32 (évidemment vrai aussi pour $\beta = 0$), avec $a = 4$, en remarquant que $H(t, x) = \frac{\partial F}{\partial x}(t, x)$ et que σ_t est uniformément borné. ■

Lemme 2.2.37 *Supposons que la fonction f corresponde au cas du put ou du call, alors on a :*

(i)

$$\left| \frac{\partial H}{\partial x}(t, x) \right| \leq C \frac{e^{-c \frac{\log^2(x/K)}{T-t}}}{\sqrt{T-t}},$$

donc (H3) est vérifié.

(ii) *$g(t)$ est dérivable par rapport à t sur $]0, T[$, et sous l'hypothèse (H2), on a :*

$$|g'(t)| \leq \frac{C}{t(T-t)^{3/2}},$$

ce qui implique (H4).

Démonstration : On ne montre le résultat que dans le cas du call, avec $f(x) = (x - K)_+$. Le cas du put est identique.

Commençons par remarquer que, en utilisant la proposition 2.2.24, l'on a :

$$\begin{aligned} H(t, x) &= \overline{\mathbf{E}} \left(f'(X_T^{t,x}) \right) \\ &= \overline{\mathbf{E}} \left(\mathbf{1}_{\{X_T^{t,x} \geq K\}} \right). \end{aligned}$$

Nous allons approcher $\mathbf{1}_{\{x \geq K\}}$ par :

$$f'_\eta(x) = \frac{1}{\eta}(x - K)\mathbf{1}_{\{K \leq x < K+\eta\}} + \mathbf{1}_{\{x \geq K+\eta\}}.$$

Nous avons vu que $H_\eta(t, x)$ vaut :

$$H_\eta(t, x) = \overline{\mathbf{E}} \left(f'_\eta(X_T^{t,x}) \right).$$

D'autre part, on a déjà prouvé que, pour (t, x) fixé, $t < T$ et $x > 0$:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} H_\eta(t, x) = H(t, x).$$

On peut de façon identique montrer que si $t < T$ on :

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\partial H_\eta}{\partial x}(t, x) = \frac{\partial H}{\partial x}(t, x).$$

Ceci va nous permettre de calculer plus explicitement $\frac{\partial H}{\partial x}(t, x)$. Pour cela, en reprenant les notations de la page 52, on montre que si $(\overline{\overline{W}}_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien sous $\overline{\overline{\mathbf{P}}}$ et si $X^{t,x}$ est la solution unique de l'équation différentielle stochastique :

$$\frac{dX_s}{X_s} = (\alpha_1(s, X_s) + \alpha_2(s, X_s)) ds + \sigma(s, X_s) dW_s,$$

issue de x en t , on a :

$$\frac{\partial H_\eta}{\partial x}(t, x) = \overline{\overline{\mathbf{E}}} \left(f''_\eta(X_T^{t,x}) e^{\int_t^T \alpha_2(s, X_s^{t,x}) ds} \right).$$

Comme en (1.10), on note $Y_t = \log X_t$. Alors, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_\eta}{\partial x}(t, x) &= \overline{\overline{\mathbf{E}}} \left(f''_\eta(e^{Y_T^{t, \log x}}) e^{\int_t^T b(s, e^{Y_T^{t, \log x}}) ds} \right) \\ &= \overline{\overline{\mathbf{E}}} \left(\frac{1}{\eta} \mathbf{1}_{K \leq e^{Y_T^{t, \log x}} < K+\eta} e^{\int_t^T b(s, e^{Y_T^{t, \log x}}) ds} \right) \\ &= \overline{\overline{\mathbf{E}}} \left(\frac{1}{\eta} \mathbf{1}_{\log K \leq Y_T^{t, \log x} < \log(K+\eta)} e^{\int_t^T b(s, e^{Y_T^{t, \log x}}) ds} \right) \\ &= \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\eta} \mathbf{1}_{\log K \leq y < \log(K+\eta)} \overline{\overline{p}}(t, T; \log x, y) dy, \end{aligned}$$

avec $\bar{\bar{p}}(t, s; x, y)$ la solution fondamentale associée à l'opérateur parabolique :

$$Mu = \frac{\partial u}{\partial t} + \bar{\bar{A}}_Y u + b(t, x)u, \quad (2.40)$$

où $\bar{\bar{A}}_Y$ est le générateur infinitésimal de Y sous la probabilité $\bar{\bar{\mathbf{P}}}$. Donc, en utilisant le théorème de valeur moyenne, on obtient :

$$\frac{\partial H_\eta}{\partial x}(t, x) = \frac{1}{\eta} \log \frac{K + \eta}{K} \bar{\bar{p}}(t, T; \log x, \log K + \theta \log \frac{K + \eta}{K}).$$

On en déduit en faisant tendre η vers 0 que :

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{1}{K} \bar{\bar{p}}(t, T; \log x, \log K).$$

avec théorème 1.3.3(ii), on a :

$$|\bar{\bar{p}}(t, T; y, \log K)| \leq C \frac{e^{-c \frac{(y - \log K)^2}{T-t}}}{\sqrt{T-t}}.$$

donc on a

$$\left| \frac{\partial H}{\partial x}(t, x) \right| \leq C \frac{e^{-c \frac{\log^2(x/K)}{T-t}}}{\sqrt{T-t}}.$$

Ainsi **(H3)** est vérifiée, avec tout $\eta < 1$.

D'autre part, si l'on note $p(s, t, y_1, y_2)$ la probabilité de transition de $\log(X_t)$ sous la probabilité initiale on peut montrer, en justifiant la dérivation sous le signe somme, que :

$$\begin{aligned} g'(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} 2 \frac{\partial H}{\partial x}(t, e^y) \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial x}(t, e^y) \sigma(t, e^y)^4 e^{4y} p(0, t; \log x_0, y) dy \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial H}{\partial x}(t, e^y) \right)^2 4 \sigma(t, e^y)^3 \frac{\partial \sigma}{\partial t}(t, e^y) e^{4y} p(0, t; \log x_0, y) dy \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial H}{\partial x}(t, e^y) \right)^2 \sigma(t, e^y)^4 e^{4y} \frac{\partial p}{\partial t}(0, t; \log x_0, y) dy. \end{aligned}$$

On peut réécrire cette égalité sous la forme :

$$\begin{aligned} g'(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} 2 \bar{\bar{p}} \frac{\partial \bar{\bar{p}}}{\partial t}(0, t; y, \log(K)) \sigma(t, e^y)^4 e^{4y} p(0, t; \log x_0, y) dy \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\bar{p}}(t, T; y, \log K)^2 4 \sigma(t, e^y)^3 \frac{\partial \sigma}{\partial t}(t, e^y) e^{4y} p(0, t; \log x_0, y) dy \quad (2.42)$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\bar{p}}(t, T; y, \log K)^2 \sigma(t, e^y)^4 e^{4y} \frac{\partial p}{\partial t}(0, t; \log x_0, y) dy. \quad (2.43)$$

Nous allons maintenant, contrôler les 3 termes intervenant dans l'équation précédente. Pour cela, toujours avec théorème 1.3.3(ii), on a :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \bar{p}}{\partial t}(t, T; y, \log K) \right| &\leq C \frac{e^{-c \frac{(y - \log K)^2}{T-t}}}{(T-t)^{3/2}}, \\ p(0, t; \log x_0, y) &\leq C \frac{e^{-c \frac{(y - \log x_0)^2}{t}}}{\sqrt{t}}, \\ \left| \frac{\partial p}{\partial t}(0, t; \log x_0, y) \right| &\leq C \frac{e^{-c \frac{(y - \log x_0)^2}{t}}}{t^{3/2}}. \end{aligned}$$

On en déduit que la valeur absolue de (2.41) est plus petite que :

$$\begin{aligned} &C \int_{-\infty}^{\infty} 2 \frac{e^{-c \frac{(y - \log K)^2}{T-t}}}{\sqrt{T-t}} \frac{e^{-c \frac{(y - \log K)^2}{T-t}}}{(T-t)^{3/2}} e^{4y} p(0, t; \log x_0, y) dy \\ &\leq \frac{C}{(T-t)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2c \frac{(y - \log K)^2}{T-t}}}{\sqrt{T-t}} e^{4y} \frac{e^{-c \frac{(y - \log x_0)^2}{t}}}{\sqrt{t}} dy \\ &\leq \frac{C}{(T-t)^{3/2}}. \end{aligned}$$

De même la valeur absolue de (2.42) est plus petite que :

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \left| (\bar{p}(t, T; y, \log K))^2 4\sigma(t, e^y)^3 \frac{\partial \sigma}{\partial t}(t, e^y) e^{4y} p(0, t; \log x_0, y) \right| dy \\ &\leq C \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{-c \frac{(y - \log K)^2}{T-t}}}{\sqrt{T-t}} \right)^2 (1 + e^{ny}) e^{4y} \frac{e^{-c \frac{(y - \log x_0)^2}{t}}}{\sqrt{t}} dy \\ &= \frac{C}{\sqrt{T-t}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2c \frac{(y - \log K)^2}{T-t}}}{\sqrt{T-t}} (1 + e^{ny}) e^{4y} \frac{e^{-c \frac{(y - \log x_0)^2}{t}}}{\sqrt{t}} dy \\ &\leq \frac{C}{\sqrt{T-t}}. \end{aligned}$$

Enfin, la valeur absolue de (2.43) est plus petite que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\bar{p}(t, T; y, \log K))^2 \sigma(t, e^y)^4 e^{4y} \left| \frac{\partial p}{\partial t}(0, t; \log x_0, y) \right| dy$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{-c \frac{(y - \log K)^2}{T-t}}}{\sqrt{T-t}} \right)^2 e^{4y} \frac{e^{-c \frac{(y - \log x_0)^2}{t}}}{t^{3/2}} dy \\
&= \frac{C}{t\sqrt{T-t}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2c \frac{(y - \log K)^2}{T-t}}}{\sqrt{T-t}} e^{4y} \frac{e^{-c \frac{(y - \log x_0)^2}{t}}}{\sqrt{t}} dy \\
&\leq \frac{C}{t\sqrt{T-t}}
\end{aligned}$$

Les trois inégalités précédentes prouvent que :

$$|g'(t)| \leq \frac{C}{(T-t)^{3/2}} + \frac{C}{\sqrt{T-t}} + \frac{C}{t\sqrt{T-t}} \leq \frac{C}{t(T-t)^{3/2}}.$$

■

On établit maintenant un résultat légèrement plus fort quand la fonction f est plus régulière.

Lemme 2.2.38 *Si l'hypothèse **(H2)** est vérifiée et si l'actif contingent est de la forme $f(X_T)$ avec f deux fois dérivable telle que :*

$$|f''(x)| \leq C(1 + |x|^\alpha),$$

alors $g(t)$ est dérivable sur l'intervalle $]0, T[$, et :

$$|g'(t)| \leq \frac{C}{t(T-t)}.$$

Démonstration : On écrit $Y_t = \log X_t$ et donc :

$$g(t) = \mathbf{E} \left(\left(\frac{\partial H}{\partial x}(t, e^{Y_t}) \right)^2 \sigma(t, e^{Y_t})^4 e^{4Y_t} \right).$$

Soit p la probabilité de transfert de Y_t sous la probabilité initiale \mathbf{P} . En utilisant le théorème 1.3.3(ii), p est la solution fondamentale de l'opérateur

$$\frac{\partial}{\partial t} + A_Y,$$

avec A_Y le générateur infinitésimal de Y sous \mathbf{P} .

On a, alors :

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left(\frac{\partial H}{\partial x}(t, e^y) \right)^2 \sigma(t, e^y)^4 e^{4y} p(0, t; \log x_0, y) dy \right).$$

En justifiant la dérivation sous le signe somme, on obtient :

$$g'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} 2 \frac{\partial H}{\partial x}(t, e^y) \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial x}(t, e^y) \sigma(t, e^y)^4 e^{4y} p(0, t; \log x_0, y) dy \quad (2.44)$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial H}{\partial x}(t, e^y) \right)^2 4 \sigma(t, e^y)^3 \frac{\partial \sigma}{\partial t}(t, e^y) e^{4y} p(0, t; \log x_0, y) dy \quad (2.45)$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial H}{\partial x}(t, e^y) \right)^2 \sigma(t, e^y)^4 e^{4y} \frac{\partial p}{\partial t}(0, t; \log x_0, y) dy. \quad (2.46)$$

Par lemme 2.2.35 on a :

$$\left| \frac{\partial H}{\partial x}(t, x) \right| \leq C(1 + |x|^\alpha). \quad (2.47)$$

D'autre part, en s'inspirant de la démonstration du lemme 2.2.34, on prouve que :

$$\left| \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(t, x) \right| \leq C \frac{1 + |x|^\alpha}{x\sqrt{T-t}}, \quad (2.48)$$

et :

$$\left| \frac{\partial^3 H}{\partial x^3}(t, x) \right| \leq C \frac{1 + |x|^\alpha}{x^2(T-t)}. \quad (2.49)$$

D'autre part, on vérifie que les conditions (A1) – (A3) sont vérifiées pour l'opérateur parabolique associé à $\log(X)$ sous $\overline{\overline{\mathbf{P}}}$. Ceci permet de montrer que $\frac{\partial H}{\partial x}(t, x)$ vérifie l'équation différentielle aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \overline{\overline{A}}_X u + b(t, x)u = 0,$$

avec $\overline{\overline{A}}_X$ le générateur infinitésimal de X sous $\overline{\overline{\mathbf{P}}}$, et $b(t, x)$ défini par (2.32). En utilisant (2.27) et (2.30), on voit que, sous $\overline{\overline{\mathbf{P}}}$, X satisfait l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{aligned} \frac{dX_t}{X_t} &= (r + \sigma(t, X_t)(\sigma(t, X_t) + X_t \sigma'(t, X_t)))dt + \sigma(t, X_t)(d\overline{\overline{W}}_t + (\sigma(t, X_t) + \sigma'(t, X_t)X_t)dt) \\ &= (r + 2\sigma(t, X_t)(\sigma(t, X_t) + X_t \sigma'(t, X_t)))dt + \sigma(t, X_t)d\overline{\overline{W}}_t. \end{aligned}$$

Donc, $\overline{\overline{A}}$ peut s'écrire :

$$\overline{\overline{A}} = (r + 2\sigma(t, x)(\sigma(t, x) + x\sigma'(t, x)))x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma(t, x)^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right) &= -(\overline{\overline{A}} \frac{\partial H}{\partial x} + b(t, x) \frac{\partial H}{\partial x}) \\ &= -(r + 2\sigma(t, x)(\sigma(t, x) + x\sigma'(t, x)))x \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\sigma(t, x)^2 x^2 \frac{\partial^3 H}{\partial x^3} - b(t, x) \frac{\partial H}{\partial x}. \end{aligned}$$

Si l'on remarque que les coefficients $r + 2\sigma(t, x)(\sigma(t, x) + x\sigma'(t, x))$ et $b(t, x)$ sont bornés, alors on peut en déduire que :

$$\left| \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial x} \right| \leq C \left(|x| \left| \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right| + |x|^2 \left| \frac{\partial^3 H}{\partial x^3} \right| + \left| \frac{\partial H}{\partial x} \right| \right).$$

D'où, en utilisant (2.47), (2.48) et (2.49) :

$$\left| \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial x}(t, x) \right| \leq C \frac{1 + |x|^{\alpha+2}}{T - t}.$$

Ceci implique que la valeur absolue de (2.44) est plus petite que :

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \left| 2 \frac{\partial H}{\partial x}(t, e^y) \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial x}(t, e^y) \sigma(t, e^y)^4 e^{4y} p(0, t; \log x_0, y) \right| dy \\ &\leq C \int_{-\infty}^{\infty} (1 + e^{\alpha y}) \frac{1 + e^{(\alpha+2)y}}{T - t} e^{4y} p(0, t; \log x_0, y) dy, \end{aligned}$$

et donc inférieure à :

$$\begin{aligned} &C \int_{-\infty}^{\infty} (1 + e^{\alpha y}) \frac{1 + e^{(\alpha+2)y}}{T - t} e^{4y} C \frac{e^{-c \frac{(y - \log x_0)^2}{t}}}{\sqrt{t}} dy \\ &\leq \frac{C}{T - t} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + e^{\alpha y}) (1 + e^{(\alpha+2)y}) e^{4y} \frac{e^{-c \frac{(y - \log x_0)^2}{t}}}{\sqrt{t}} dy \\ &\leq \frac{C}{T - t}. \end{aligned}$$

Pour majorer (2.45), on note que **(H2)** est vérifié et on utilise (2.47), pour montrer que (2.45) est majoré par :

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(\frac{\partial H}{\partial x}(t, e^y) \right)^2 4\sigma(t, e^y)^3 \frac{\partial \sigma}{\partial t}(t, e^y) e^{4y} p(0, t; \log x_0, y) \right| dy \\
& \leq C \int_{-\infty}^{\infty} (1 + e^{\alpha y})^2 (1 + e^{ny}) e^{4y} p(0, t; \log x_0, y) dy \\
& \leq C \int_{-\infty}^{\infty} (1 + e^{\alpha y})^2 (1 + e^{ny}) e^{4y} \frac{e^{-c \frac{(y - \log x_0)^2}{t}}}{\sqrt{t}} dy \\
& \leq C.
\end{aligned}$$

Enfin pour majorer (2.46), on note que l'on a :

$$\left| \frac{\partial p}{\partial t}(0, t; \log x_0, y) \right| \leq C \frac{e^{-c \frac{(y - \log x_0)^2}{t}}}{\sqrt{t^{3/2}}},$$

et l'on en déduit que :

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} (1 + e^{\alpha y})^2 e^{4y} C \frac{e^{-c \frac{(y - \log x_0)^2}{t}}}{t^{3/2}} dy \\
& = \frac{C}{t} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + e^{\alpha y})^2 e^{4y} C \frac{e^{-c \frac{(y - \log x_0)^2}{t}}}{\sqrt{t}} dy \\
& \leq \frac{C}{t}.
\end{aligned}$$

Les trois inégalités précédentes prouvent que :

$$|g'(t)| \leq C \left(1 + \frac{1}{T-t} + \frac{1}{t} \right) \leq \frac{C}{t(T-t)}.$$

■

Lemme 2.2.39 *Pour tout $\beta > 0$, on a :*

$$\mathbf{E} \left(\left(\sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t \frac{\partial H_s}{\partial x} \sigma_s X_s dW_s \right)^2 dt \right)^{1+\beta} \right) \leq K\varepsilon.$$

Démonstration : Comme :

$$\left(\int_0^T |a_t| dt \right)^{1+\beta} \leq C \int_0^T |a_t|^{1+\beta} dt$$

on en déduit :

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E} \left(\left(\sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t \frac{\partial H_s}{\partial x} \sigma_s X_s dW_s \right)^2 dt \right)^{1+\beta} \right) \\
& \leq C_1 \mathbf{E} \left(\left(\sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left| \int_{k\varepsilon}^t \frac{\partial H_s}{\partial x} \sigma_s X_s dW_s \right|^{2(1+\beta)} dt \right) \right) \\
& \leq C_1 \mathbf{E} \left(\left(\sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \sup_{k\varepsilon \leq t \leq (k+1)\varepsilon} \left| \int_{k\varepsilon}^t \frac{\partial H_s}{\partial x} \sigma_s X_s dW_s \right|^{2(1+\beta)} dt \right) \right) \\
& = C_1 \left(\sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \mathbf{E} \left(\sup_{k\varepsilon \leq t \leq (k+1)\varepsilon} \left| \int_{k\varepsilon}^t \frac{\partial H_s}{\partial x} \sigma_s X_s dW_s \right|^{2(1+\beta)} \right) dt \right).
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Doob, on en déduit, que (avec une nouvelle constants C_2) ceci est plus petit que :

$$\begin{aligned}
& C_2 \varepsilon \left(\sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{E} \left(\left(\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\frac{\partial H_s}{\partial x} \sigma_s X_s \right)^2 ds \right)^{1+\beta} \right) dt \right) \\
& = C_2 \varepsilon \left(\sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \mathbf{E} \left(\left(\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\frac{\partial H_s}{\partial x} \sigma_s X_s \right)^2 ds \right)^{1+\beta} \right) \right)
\end{aligned}$$

Mais, on vérifie facilement que, pour $\beta > 0$:

$$\sum_{k=1}^n x_k^{1+\beta} \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^{1+\beta}$$

pour des nombres réels positifs x_k . On en déduit donc que :

$$\mathbf{E} \left(\left(\sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t \frac{\partial H_s}{\partial x} \sigma_s X_s dW_s \right)^2 dt \right)^{1+\beta} \right) \leq C_2 \varepsilon \mathbf{E} \left(\left(\int_0^T \left(\frac{\partial H_s}{\partial x} \sigma_s X_s \right)^2 ds \right)^{1+\beta} \right),$$

ce qui prouve le lemme. ■

Lemme 2.2.40 *pour tout $\beta > 0$, on a :*

$$\mathbf{E} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \left(\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t \frac{\partial H_s}{\partial x} \sigma_s X_s dW_s \right)^2 dt \right)^{1+\beta} \right) \leq K \varepsilon^{1+\beta}.$$

Démonstration : En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \left(\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t \frac{\partial H_s}{\partial x} \sigma_s X_s dW_s \right)^2 dt \right)^{1+\beta} \right) \\
& \leq C_1 \varepsilon^\beta \mathbf{E} \left(\left(\sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left| \int_{k\varepsilon}^t \frac{\partial H_s}{\partial x} \sigma_s X_s dW_s \right|^{2(1+\beta)} dt \right) \right) \\
& \leq C_1 \varepsilon^\beta \mathbf{E} \left(\left(\sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \sup_{k\varepsilon \leq t \leq (k+1)\varepsilon} \left| \int_{k\varepsilon}^t \frac{\partial H_s}{\partial x} \sigma_s X_s dW_s \right|^{2(1+\beta)} dt \right) \right) \\
& = C_1 \varepsilon^{1+\beta} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{E} \left(\sup_{k\varepsilon \leq t \leq (k+1)\varepsilon} \left| \int_{k\varepsilon}^t \frac{\partial H_s}{\partial x} \sigma_s X_s dW_s \right|^{2(1+\beta)} \right)
\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy , on obtient :

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \left(\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t \frac{\partial H_s}{\partial x} \sigma_s X_s dW_s \right)^2 dt \right)^{1+\beta} \right) \\
& \leq C_2 \varepsilon^{1+\beta} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{E} \left(\left(\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\frac{\partial H_s}{\partial x} \sigma_s X_s \right)^2 ds \right)^{1+\beta} \right) \\
& = C_2 \varepsilon^{1+\beta} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \mathbf{E} \left(\left(\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\frac{\partial H_s}{\partial x} \sigma_s X_s \right)^2 ds \right)^{1+\beta} \right) \right) \\
& \leq C_2 \varepsilon^{1+\beta} \mathbf{E} \left\{ \left(\int_0^T \left(\frac{\partial H_s}{\partial x} \sigma_s X_s \right)^2 ds \right)^{1+\beta} \right\}.
\end{aligned}$$

On en déduit le lemme en utilisant le fait que σ_s est borné et le corollaire 2.2.32. ■

2.2.5 Démonstration du théorème 2.1.2

Dans cette section on donne la démonstration du théorème 2.1.2.

Remarquons que $R_\varepsilon = R(\varepsilon, H)$, et comme $H_t \in \mathcal{M}^2(\mathbf{P})$ (Remarque 2.2.27), et par (2.24) et corollaire 2.2.19, on a

$$R_\varepsilon = \mathbf{E} \sum_k \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^t e^{-2rs} \sigma^4(s, X_s) X_s^4 \left(\frac{\partial H(s, X_s)}{\partial x} \right)^2 ds dt + r(\varepsilon),$$

où $r(\varepsilon)$ est d'ordre $o(\varepsilon)$.

Pour montrer (i) du théorème 2.1.2, on voit que $g(t)$ est continue et intégrable sur $[0, T[$ par lemme 2.2.36, alors (i) est montré en appliquant lemme 2.2.20(i).

Pour montrer (ii), remarquons que sous **(H2)** et **(H3)**, $r(\varepsilon)$ est d'ordre $O(\varepsilon^{3/2})$ par corollaire 2.2.19.

De plus, on écrit

$$R_\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon \mathbf{E} \left(\int_0^T e^{-2rt} X_t^4 \sigma^4(t, X_t) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, X_t) \right)^2 dt \right) + r(\varepsilon) + \tilde{r}(\varepsilon),$$

$\tilde{r}(\varepsilon)$ est aussi d'ordre $O(\varepsilon^{3/2})$ par lemme 2.2.20(ii).

D'où (ii) du théorème 2.1.2.

On montre maintenant le corollaire 2.1.3.

Dans le cas de call et put, par lemme 2.2.37, on a

$$|g'(t)| \leq \frac{C}{(T-t)^{3/2}},$$

donc $\tilde{r}(\varepsilon)$ est d'ordre $O(\varepsilon^{3/2})$ par lemme 2.2.20(ii). Donc

$$R_\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon \mathbf{E} \left(\int_0^T e^{-2rt} X_t^4 \sigma^4(t, X_t) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, X_t) \right)^2 dt \right) + O(\varepsilon^{3/2}).$$

Quand f est deux fois dérivable avec $|f''(x)| \leq C(1 + |x|^\alpha)$, par (2.33),

$$\mathbf{E} \left(\frac{\partial H(t, X_t)}{\partial x} X_t \sigma_t \right)^4$$

est borné, donc **(H3)** est vérifié, ce qui donne que $r(\varepsilon)$ est d'ordre $O(\varepsilon^{3/2})$. Et $\tilde{r}(\varepsilon)$ est d'ordre $O(\varepsilon^2)$ d'après lemme 2.2.20(ii).

Donc

$$R_\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon \mathbf{E} \left(\int_0^T e^{-2rt} X_t^4 \sigma^4(t, X_t) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, X_t) \right)^2 dt \right) + O(\varepsilon^{3/2}).$$

D'où le corollaire.

2.2.6 Démonstration du théorème 2.1.4

Dans cette section, nous donnons la démonstration du théorème 2.1.4.

Démonstration : On commence par noter que le risque résiduel de la couverture approchée optimale vaut :

$$\begin{aligned}
R_{(\varepsilon)} &= \mathbf{E} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} (H_t - H_{(k\varepsilon)})^2 \tilde{X}_t^2 \sigma(t, X_t) dt \right) \\
&= \mathbf{E} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} ((H_t - H_{k\varepsilon}) \right. \\
&\quad \left. - (H_{(k\varepsilon)} - H_{k\varepsilon}))^2 \tilde{X}_t^2 \sigma^2(t, X_t) dt \right)
\end{aligned}$$

Si l'on note $B_{k\varepsilon} = H_{(k\varepsilon)} - H_{k\varepsilon}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
R_{(\varepsilon)} &= \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} (H_t - H_{k\varepsilon})^2 \tilde{X}_t^2 \sigma^2(t, X_t) dt \\
&\quad - 2\mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} B_{k\varepsilon} (H_t - H_{k\varepsilon}) \tilde{X}_t^2 \sigma^2(t, X_t) dt \\
&\quad + \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} B_{k\varepsilon}^2 \tilde{X}_t^2 \sigma^2(t, X_t) dt \\
&= R_\varepsilon - 2\mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} B_{k\varepsilon} (H_t - H_{k\varepsilon}) \tilde{X}_t^2 \sigma^2(t, X_t) dt \\
&\quad + \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} B_{k\varepsilon}^2 \tilde{X}_t^2 \sigma^2(t, X_t) dt \\
&= R_\varepsilon - 2\mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} B_{k\varepsilon} \mathbf{E} \left[\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} (H_t - H_{k\varepsilon}) \tilde{X}_t^2 \sigma^2(t, X_t) dt \middle| \mathcal{F}_{k\varepsilon} \right] \\
&\quad + \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} B_{k\varepsilon}^2 \tilde{X}_t^2 \sigma^2(t, X_t) dt. \tag{2.50}
\end{aligned}$$

De plus, en utilisant la formule de $H_{(k\varepsilon)}$, on voit que :

$$\begin{aligned}
B_{k\varepsilon} &= H_{(k\varepsilon)} - H_{k\varepsilon} \\
&= \frac{\mathbf{E}(\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} (H_t - H_{k\varepsilon}) \tilde{X}_t^2 \sigma^2(t, X_t) dt \middle| \mathcal{F}_{k\varepsilon})}{\mathbf{E}(\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \tilde{X}_t^2 \sigma^2(t, X_t) dt \middle| \mathcal{F}_{k\varepsilon})} \\
&= C_{k\varepsilon} G_{k\varepsilon}
\end{aligned}$$

avec :

$$C_{k\varepsilon} = \mathbf{E} \left(\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} (H_t - H_{k\varepsilon}) \tilde{X}_t^2 \sigma^2(t, X_t) dt \middle| \mathcal{F}_{k\varepsilon} \right)$$

et :

$$G_{k\varepsilon} = (\mathbf{E}(\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \tilde{X}_t^2 \sigma^2(t, X_t) dt | \mathcal{F}_{k\varepsilon}))^{-1}.$$

Donc (2.50) peut s'écrire comme :

$$\begin{aligned} R_{(\varepsilon)} &= R_\varepsilon - 2\mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} B_{k\varepsilon} C_{k\varepsilon} + \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} B_{k\varepsilon}^2 \tilde{X}_t^2 \sigma^2(t, X_t) dt \\ &= R_\varepsilon - 2\mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} C_{k\varepsilon}^2 G_{k\varepsilon} \\ &\quad + \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} C_{k\varepsilon}^2 G_{k\varepsilon}^2 \mathbf{E}(\tilde{X}_t^2 \sigma^2(t, X_t) | \mathcal{F}_{k\varepsilon}) dt. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Si l'on note :

$$b_{k\varepsilon} = \frac{\mathbf{E}(\tilde{X}_t^2 \sigma^2(t, X_t) | \mathcal{F}_{k\varepsilon})}{X_{k\varepsilon}^2},$$

On a :

$$\begin{aligned} R_{(\varepsilon)} &= R_\varepsilon - 2\mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} C_{k\varepsilon}^2 G_{k\varepsilon} + \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} C_{k\varepsilon}^2 G_{k\varepsilon}^2 X_{k\varepsilon}^2 b_{k\varepsilon} dt \\ &= R_\varepsilon - 2\mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} C_{k\varepsilon}^2 G_{k\varepsilon} + \varepsilon \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} C_{k\varepsilon}^2 G_{k\varepsilon}^2 X_{k\varepsilon}^2 b_{k\varepsilon}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Nous allons chercher à estimer maintenant les quantités $G_{k\varepsilon}$ et $C_{k\varepsilon}$. En ce qui concerne $G_{k\varepsilon}$, il est facile d'obtenir, en utilisant le fait que $|\sigma|$ est minoré, et le fait que \tilde{X}_t est une martingale sous \mathbf{P} que :

$$\begin{aligned} |G_{k\varepsilon}| &= \left(\mathbf{E}(\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \tilde{X}_t^2 \sigma^2(t, X_t) dt | \mathcal{F}_{k\varepsilon}) \right)^{-1} \\ &\leq \varepsilon^{-1} C X_{k\varepsilon}^{-2}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Pour contrôler $C_{k\varepsilon}$ nous allons établir le lemme suivant :

Lemme 2.2.41 *Il existe une constante $C > 0$, un entier n , tel que, pour tout $k = 0..N-1$, on ait la majoration suivante :*

$$\begin{aligned}
|C_{k\varepsilon}| &\leq C\varepsilon \mathbf{E} \left(\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left| \frac{\partial H_t}{\partial x} X_t^3 \right| dt | \mathcal{F}_{k\varepsilon} \right) \\
&\quad + C\varepsilon^2 (1 + |X_{k\varepsilon}|^n) \left(\mathbf{E} \left(\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left| \frac{\partial H_t}{\partial x} X_t \right|^2 dt | \mathcal{F}_{k\varepsilon} \right) \right)^{1/2}. \quad (2.54)
\end{aligned}$$

Démonstration : En développant $H_t = H(t, X_t)$ à l'aide de la formule d'Ito on obtient :

$$\begin{aligned}
C_{k\varepsilon} &= \mathbf{E} \left(\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} (H_t - H_{k\varepsilon}) \tilde{X}_t^2 \sigma^2(t, X_t) dt | \mathcal{F}_{k\varepsilon} \right) \\
&= \mathbf{E} \left[\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t -(\sigma_s^2 + \sigma_s X_s \sigma'_s) X_s \frac{\partial H_s}{\partial x} ds \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_{k\varepsilon}^t \frac{\partial H_s}{\partial x} X_s \sigma_s dW_s \right) \tilde{X}_t^2 \sigma_t^2 dt | \mathcal{F}_{k\varepsilon} \right] \\
&= \mathbf{E} \left[\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t -(\sigma_s^2 + \sigma_s X_s \sigma'_s) X_s \frac{\partial H_s}{\partial x} ds \right) \tilde{X}_t^2 \sigma_t^2 dt | \mathcal{F}_{k\varepsilon} \right] \quad (2.55)
\end{aligned}$$

$$+ \mathbf{E} \left[\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t \frac{\partial H_s}{\partial x} X_s \sigma_s dW_s \right) \tilde{X}_t^2 \sigma_t^2 dt | \mathcal{F}_{k\varepsilon} \right] \quad (2.56)$$

On va s'intéresser aux valeurs absolues de (2.55) et (2.56). La valeur absolue de (2.55) peut être estimée par :

$$\begin{aligned}
&\left| \mathbf{E} \left[\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t -(\sigma_s^2 + \sigma_s X_s \sigma'_s) X_s \frac{\partial H_s}{\partial x} ds \right) \tilde{X}_t^2 \sigma_t^2 dt | \mathcal{F}_{k\varepsilon} \right] \right| \\
&\leq C \mathbf{E} \left[\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t \left| X_s \frac{\partial H_s}{\partial x} \right| ds \right) \tilde{X}_t^2 dt | \mathcal{F}_{k\varepsilon} \right] \\
&= C \mathbf{E} \left[\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t \left| X_s \frac{\partial H_s}{\partial x} \right| \tilde{X}_t^2 ds \right) dt | \mathcal{F}_{k\varepsilon} \right] \\
&= C \mathbf{E} \left[\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t \left| X_s \frac{\partial H_s}{\partial x} \right| \mathbf{E}(\tilde{X}_t^2 | \mathcal{F}_s) ds \right) dt | \mathcal{F}_{k\varepsilon} \right] \\
&\leq C \mathbf{E} \left[\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t \left| X_s^3 \frac{\partial H_s}{\partial x} \right| ds \right) dt | \mathcal{F}_{k\varepsilon} \right]
\end{aligned}$$

$$\leq C\varepsilon \mathbf{E} \left[\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left| X_t^3 \frac{\partial H_t}{\partial x} \right| dt | \mathcal{F}_{k\varepsilon} \right].$$

Pour estimer (2.56), nous allons développer $\tilde{X}_t^2 \sigma_t^2$ à l'aide de la formule d'Ito, ceci est possible puisque l'on a supposé que $\sigma(t, x) \in C^{1,\infty}([0, T] \times \mathbf{R})$. On obtient, en notant $\sigma_t = \sigma(t, X_t)$:

$$\begin{aligned} d(\sigma_t^2 \tilde{X}_t^2) &= d(\sigma_t^2 X_t^2 e^{-2rt}) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} (\sigma_t^2 X_t^2 e^{-2rt}) e^{-2rt} A(\sigma_t^2 X_t^2) \right) dt \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$+ e^{-2rt} \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_t^2 X_t^2) d\tilde{X}_t \quad (2.58)$$

si A est le générateur infinitésimal de X_t . On obtient ici :

$$A(\sigma^2 x^2) = \sigma^2 x^2 (\sigma \sigma'' x^2 + \sigma'^2 x^2 + 4x \sigma \sigma' + \sigma^2) + 2r \sigma x^2 (\sigma' x + \sigma),$$

d'où :

$$\begin{aligned} d(\sigma_t^2 \tilde{X}_t^2) &= \left(2\sigma_t e^{-2rt} X_t^2 \left(\frac{\partial \sigma_t}{\partial t} - r \sigma_t \right) + e^{-2rt} [\sigma_t^2 X_t^2 (\sigma_t \sigma_t'' X_t^2 \right. \\ &\quad \left. + \sigma_t'^2 X_t^2 + 4X_t \sigma_t \sigma_t' + \sigma_t^2) + 2r \sigma_t x^2 (\sigma_t' X_t + \sigma_t)] \right) dt \\ &\quad + 2e^{-2rt} X_t \sigma_t (\sigma_t^2 X_t + \sigma_t) d\tilde{X}_t. \end{aligned}$$

Vues les hypothèses faites sur σ , on sait que $x \frac{\partial \sigma}{\partial x}(t, x)$ et $x^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}(t, x)$ sont uniformément bornés, on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 \tilde{X}_t^2 &= \sigma_{k\varepsilon}^2 \tilde{X}_{k\varepsilon}^2 + \int_{k\varepsilon}^t (2\sigma_s e^{-2rs} X_s^2 \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} - r \sigma_s \right) + X_s^2 C_s) ds \\ &\quad + \int_{k\varepsilon}^t 2e^{-3rs} X_s^2 \sigma_s^2 (\sigma_s' X_s + \sigma_s) dW_s, \end{aligned}$$

avec C_t un processus adapté et uniformément borné. On en déduit que le terme (2.56) s'écrit comme :

$$\mathbf{E} \left[\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t \frac{\partial H_s}{\partial x} X_s \sigma_s dW_s \right) \tilde{X}_t^2 \sigma_t^2 dt | \mathcal{F}_{k\varepsilon} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{E} \left[\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t \frac{\partial H_s}{\partial x} X_s \sigma_s dW_s \right) [\sigma_{k\varepsilon}^2 \tilde{X}_{k\varepsilon}^2 \right. \\
&\quad + \int_{k\varepsilon}^t (2\sigma_s e^{-2rs} X_s^2 (\frac{\partial \sigma}{\partial t} - r\sigma_s) + X_s^2 C_s) ds \\
&\quad \left. + \int_{k\varepsilon}^t 2e^{-3rs} X_s^2 \sigma_s^2 (\sigma'_s X_s + \sigma_s) dW_s] dt | \mathcal{F}_{k\varepsilon} \right].
\end{aligned}$$

Notons tout d'abord qu'il est clair que :

$$\mathbf{E} \left[\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t \frac{\partial H_s}{\partial x} X_s \sigma_s dW_s \right) \sigma_{k\varepsilon}^2 \tilde{X}_{k\varepsilon}^2 dt | \mathcal{F}_{k\varepsilon} \right] = 0.$$

Il faut donc estimer les deux quantités :

$$D_k = \mathbf{E} \left[\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t \frac{\partial H_s}{\partial x} X_s \sigma_s dW_s \right) \left(\int_{k\varepsilon}^t 2e^{-3rs} X_s^2 \sigma_s^2 (\sigma'_s X_s + \sigma_s) dW_s \right) dt | \mathcal{F}_{k\varepsilon} \right]$$

$$E_k = \mathbf{E} \left[\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t \frac{\partial H_s}{\partial x} X_s \sigma_s dW_s \right) \left(\int_{k\varepsilon}^t (2\sigma_s e^{-2rs} X_s^2 (\frac{\partial \sigma}{\partial t} - r\sigma_s) + X_s^2 C_s) ds \right) dt | \mathcal{F}_{k\varepsilon} \right].$$

En ce qui concerne D_k , notons que, en utilisant l'isométrie de l'intégral stochastique, on a :

$$D_k = \mathbf{E} \left[\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t \frac{\partial H_s}{\partial x} X_s \sigma_s \cdot 2e^{-3rs} X_s^2 \sigma_s^2 (\sigma'_s X_s + \sigma_s) ds dt | \mathcal{F}_{k\varepsilon} \right) \right]$$

comme $\sigma'x, \sigma$ sont uniformément bornés, cela implique que :

$$\begin{aligned}
|D_k| &\leq C \mathbf{E} \left[\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t \left| \frac{\partial H_s}{\partial x} X_s^3 \right| ds dt | \mathcal{F}_{k\varepsilon} \right) \right] \\
&\leq C\varepsilon \mathbf{E} \left[\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left| \frac{\partial H_s}{\partial x} X_s^3 \right| ds | \mathcal{F}_{k\varepsilon} \right].
\end{aligned}$$

Pour estimer E_k , on commence par utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour obtenir :

$$|E_k| \leq \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\mathbf{E}_{\mathcal{F}_{k\varepsilon}} \left(\int_{k\varepsilon}^t \frac{\partial H_s}{\partial x} X_s \sigma_s dW_s \right)^2 \right)^{1/2} \times \quad (2.59)$$

$$\times \left[\mathbf{E}_{\mathcal{F}_{k\varepsilon}} \left(\int_{k\varepsilon}^t (2\sigma_s e^{-2rs} X_s^2 (\frac{\partial \sigma}{\partial t} - r\sigma_s) + X_s^2 C_s) ds \right)^2 \right]^{1/2} dt. \quad (2.60)$$

On remarque alors que (2.59) peut s'écrire :

$$\mathbf{E}_{\mathcal{F}_{k\varepsilon}} \left(\int_{k\varepsilon}^t \frac{\partial H_s}{\partial x} X_s \sigma_s dW_s \right)^2 = \mathbf{E}_{\mathcal{F}_{k\varepsilon}} \left(\int_{k\varepsilon}^t \left| \frac{\partial H_s}{\partial x} X_s \sigma_s \right|^2 ds \right).$$

D'autre part, comme on a :

$$\left| \frac{\partial \sigma}{\partial t}(t, x) \right| \leq L(1 + |x|^\alpha),$$

(2.60) est majoré, si est n assez grand, par :

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_{\mathcal{F}_{k\varepsilon}} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t \left(2\sigma_s e^{-2rs} X_s^2 \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} - r\sigma_s \right) + X_s^2 C_s \right) ds \right)^2 dt \\ & \leq \varepsilon \mathbf{E}_{\mathcal{F}_{k\varepsilon}} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(2\sigma_s e^{-2rs} X_s^2 \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} - r\sigma_s \right) + X_s^2 C_s \right)^2 ds \\ & \leq \varepsilon C \mathbf{E}_{\mathcal{F}_{k\varepsilon}} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} (X_s^2 (1 + |X_s|^\alpha) + X_s^2)^2 ds \\ & \leq \varepsilon C \mathbf{E}_{\mathcal{F}_{k\varepsilon}} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} (1 + |X_s|^n) ds \\ & \leq \varepsilon^2 C (1 + |X_{k\varepsilon}|^n). \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} |E_k| & \leq \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\mathbf{E}_{\mathcal{F}_{k\varepsilon}} \int_{k\varepsilon}^t \left| \frac{\partial H_s}{\partial x} X_s \sigma_s \right|^2 ds \right)^{1/2} (\varepsilon^2 (1 + |X_{k\varepsilon}|^n))^{1/2} dt \\ & \leq \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\mathbf{E}_{\mathcal{F}_{k\varepsilon}} \int_{k\varepsilon}^t \left| \frac{\partial H_s}{\partial x} X_s \sigma_s \right|^2 ds \right)^{1/2} (\varepsilon (1 + |X_{k\varepsilon}|^n)) dt \\ & = \varepsilon^2 (1 + |X_{k\varepsilon}|^n) \left(\mathbf{E}_{\mathcal{F}_{k\varepsilon}} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left| \frac{\partial H_s}{\partial x} X_s \sigma_s \right|^2 ds \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

On en déduit que (2.56) qui est égal à $D_k + E_k$ est majoré par :

$$\begin{aligned} & |D_k + E_k| \\ & \leq C\varepsilon \mathbf{E} \left[\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left| \frac{\partial H_s}{\partial x} X_s^3 \right| ds | \mathcal{F}_{k\varepsilon} \right] \\ & \quad + C\varepsilon^2 (1 + |X_{k\varepsilon}|^n) \left(\mathbf{E}_{\mathcal{F}_{k\varepsilon}} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left| \frac{\partial H_s}{\partial x} X_s \sigma_s \right|^2 ds \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Enfin comme $C_{k\varepsilon}$ est la somme de (2.55) et (2.56), on en déduit que :

$$\begin{aligned} |C_{k\varepsilon}| &\leq C\varepsilon \mathbf{E} \left(\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left| \frac{\partial H_s}{\partial x} X_s^3 \right| ds | \mathcal{F}_{k\varepsilon} \right) \\ &\quad + C\varepsilon^2 (1 + |X_{k\varepsilon}|^n) \left(\mathbf{E}_{\mathcal{F}_{k\varepsilon}} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left| \frac{\partial H_s}{\partial x} X_s \sigma_s \right|^2 ds \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

■

En utilisant ce lemme, on voit que :

$$\begin{aligned} C_{k\varepsilon}^2 &\leq C\varepsilon^2 \mathbf{E} \left(\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left| \frac{\partial H_s}{\partial x} X_s^3 \right| ds | \mathcal{F}_{k\varepsilon} \right)^2 \\ &\quad + C\varepsilon^4 (1 + |X_{k\varepsilon}|^{2n}) \mathbf{E}_{\mathcal{F}_{k\varepsilon}} \left(\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left| \frac{\partial H_s}{\partial x} X_s \sigma_s \right|^2 ds \right) \\ &\leq C\varepsilon^3 \mathbf{E} \left(\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left| \frac{\partial H_s}{\partial x} X_s^3 \right|^2 ds | \mathcal{F}_{k\varepsilon} \right) \\ &\quad + C\varepsilon^4 (1 + |X_{k\varepsilon}|^{2n}) \mathbf{E}_{\mathcal{F}_{k\varepsilon}} \left(\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left| \frac{\partial H_s}{\partial x} X_s \sigma_s \right|^2 ds \right). \end{aligned}$$

Nous allons montrer maintenant que les deuxième et troisième termes de (2.52) converge vers 0 à une vitesse plus grande que ε .

Nous commençons par traiter le troisième terme de (2.52). En utilisant le lemme 2.2.41, l'inégalité (2.53) et le fait que $b_{k\varepsilon}$ est borné uniformément, on obtient :

$$\begin{aligned} &\left| \varepsilon \mathbf{E} \left(\sum_{k=0}^{N-1} C_{k\varepsilon}^2 G_{k\varepsilon}^2 X_{k\varepsilon}^2 b_{k\varepsilon} \right) \right| \\ &\leq \varepsilon \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} C_{k\varepsilon}^2 \varepsilon^{-2} C X_{k\varepsilon}^{-4} X_{k\varepsilon}^2 \\ &\leq \varepsilon^{-1} \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} X_{k\varepsilon}^{-2} \left(C\varepsilon^3 \mathbf{E} \left[\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left| \frac{\partial H_s}{\partial x} X_s^3 \right|^2 ds | \mathcal{F}_{k\varepsilon} \right] \right. \\ &\quad \left. + C\varepsilon^4 (1 + |X_{k\varepsilon}|^{2n}) \mathbf{E}_{\mathcal{F}_{k\varepsilon}} \left(\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left| \frac{\partial H_s}{\partial x} X_s \sigma_s \right|^2 ds \right) \right) \\ &= \varepsilon^{-1} \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} X_{k\varepsilon}^{-2} \left(C\varepsilon^3 \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left| \frac{\partial H_s}{\partial x} X_s^3 \right|^2 ds + C\varepsilon^4 (1 + |X_{k\varepsilon}|^{2n}) \left(\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left| \frac{\partial H_s}{\partial x} X_s \sigma_s \right|^2 ds \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \varepsilon^2 \mathbf{E} \left(\sup_{t \leq T} (|X_t|^{-2} + |X_t|^4 + |X_t|^6 + |X_t|^{2n+2})^2 \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left| \frac{\partial H_s}{\partial x} \right|^2 ds \right) \\
&= \varepsilon^2 \mathbf{E} \left(\sup_{t \leq T} (|X_t|^{-2} + |X_t|^4 + |X_t|^6 + |X_t|^{2n+2})^2 \int_0^T \left| \frac{\partial H_s}{\partial x} \right|^2 ds \right) \\
&\leq \varepsilon^2 \mathbf{E} \left(\sup_{t \leq T} (|X_t|^{-2} + |X_t|^4 + |X_t|^6 + |X_t|^{2n+2})^2 \right)^{1/2} \mathbf{E} \left\{ \left(\int_0^T \left| \frac{\partial H_s}{\partial x} \right|^2 ds \right)^2 \right\}^{1/2} \\
&\leq K \varepsilon^2.
\end{aligned}$$

Un raisonnement du même type permet de prouver que le deuxième terme de (2.52) est d'ordre ε^3 . On peut donc en déduire que :

$$|R_{(\varepsilon)} - R_\varepsilon| \leq K \varepsilon^2.$$

■

2.3 Modèle Black-Scholes

On a vu dans la section 2.1 que le risque résiduel quadratique de la couverture élémentaire converge vers 0 quand ε tend vers 0, à la vitesse de $C\varepsilon$, avec :

$$C = \frac{1}{2} \mathbf{E} \left(\int_0^T e^{-2rt} X_t^4 \sigma_t^4 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, X_t) \right)^2 dt \right). \quad (2.61)$$

Nous allons dans cette section, supposer que l'actif vérifie le modèle de Black-Scholes et montrer comment dans ce cas, on peut expliciter la constante C . Nous donnerons aussi des exemples de calculs numériques de la valeur de C pour les calls, les puts et diverses combinaisons d'options.

Dans notre modèle en dimension 1, le fait de supposer que l'actif suit le modèle Black-Scholes, revient à poser $\sigma(t, x) = \text{Constante}$. Nous continuerons à noter σ cette constante.

2.3.1 Un calcul explicite dans le modèle de Black et Scholes

Nous rappelons, tout d'abord, le résultat suivant, du à Henrotte [Hen]. Ce résultat permet de calculer explicitement la constante C pour une large classe d'actifs contin-gents.

Proposition 2.3.1 *Soit l'opérateur B défini par :*

$$Bu(t, x) = u(t, x) - x \frac{\partial u}{\partial x}(t, x).$$

Si la volatilité σ est constante, alors C peut être calculé par la formule :

$$C = \frac{\sigma^2}{2} e^{-2rT} \text{Var}(Bf(X_T))$$

si f est la fonction définissant l'actif contingent.

Démonstration : L'idée est d'écrire (2.61) comme la variance de à l'instant T d'une martingale $\{M_t\}_{0 \leq t \leq T}$. Pour cela on définit une martingale M_t par :

$$M_t = \int_0^t e^{-rs} X_s^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 F_s}{\partial x^2} dW_s.$$

Alors, si on pose :

$$G(t, x) = e^{-rt} F(t, x e^{rt}),$$

on a :

$$\begin{aligned} dM_t &= e^{-rt} X_t^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 F_t}{\partial x^2} dW_t \\ &= e^{-2rt} X_t^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 G_t}{\partial x^2} dW_t \\ &= \tilde{X}_t \sigma \frac{\partial^2 G_t}{\partial x^2} d\tilde{X}_t \end{aligned} \tag{2.62}$$

Notons L le générateur infinitésimal de \tilde{X}_t :

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

On vérifie aisément que $G(t, \tilde{X}_t)$ est une martingale, et ceci permet d'en déduire que $LG = 0$.

Notons, de plus, que l'opérateur B commute avec l'opérateur L :

$$LBG = BLG = 0.$$

On en déduit que $BG(t, \tilde{X}_t)$ est une martingale. D'autre part, on a par un calcul simple que :

$$\frac{\partial}{\partial x} BG(t, \tilde{X}_t) = \tilde{X}_t \sigma \frac{\partial^2 G_t}{\partial x^2},$$

Donc, en appliquant la formule d'Ito, on obtient :

$$dBG(t, \tilde{X}_t) = \tilde{X}_t \sigma \frac{\partial^2 G_t}{\partial x^2} d\tilde{X}_t.$$

Soit, $0 \leq s \leq T$, ceci nous permet d'affirmer que :

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E} \left(\int_0^s e^{-2rt} X_t^4 \sigma^4 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, X_t) \right)^2 dt \right) \\
&= \mathbf{E} \left(\sigma \int_0^s \tilde{X}_t \sigma \frac{\partial^2 G_t}{\partial x^2} d\tilde{X}_t \right)^2 \\
&= \mathbf{E} \left(\sigma \int_0^s dB G(t, \tilde{X}_t) \right)^2 \\
&= \mathbf{E}(\sigma B G(s, \tilde{X}_s) - \sigma B G(0, x_0))^2 \\
&= \text{Var}(\sigma B G(s, \tilde{X}_s)).
\end{aligned} \tag{2.63}$$

Nous allons maintenant, faire tendre s vers T . Pour justifier cela, remarquons que :

$$\begin{aligned}
B G(s, \tilde{X}_s) &= G(s, \tilde{X}_s) - \tilde{X}_s \frac{\partial G}{\partial x}(s, \tilde{X}_s) \\
&= e^{-rs} F(s, X_s) - \tilde{X}_s \frac{\partial F}{\partial x}(s, X_s).
\end{aligned}$$

Et sous l'hypothèse **(H1)** on a montré que F et $\frac{\partial F}{\partial x}$ sont bornés uniformément. D'autre part, le corollaire 2.2.25 nous indique que :

$$H_t \rightarrow H_T \text{ p.s. quand } t \rightarrow T.$$

et l'on a la même convergence p.s. de F_t vers $F_T = f(X_T)$. On peut donc utiliser le théorème de convergence dominé de Lebesgue pour conclure que :

$$\text{Var}(B G(s, \tilde{X}_s)) \rightarrow \text{Var}(B G(T, \tilde{X}_T)).$$

Alors, en utilisant l'équation (2.63), on obtient :

$$\begin{aligned}
C &= \frac{1}{2} \mathbf{E} \left(\int_0^T e^{-2rt} X_t^4 \sigma^4 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, X_t) \right)^2 dt \right) \\
&= \frac{1}{2} \sigma^2 \text{Var}(B G(T, \tilde{X}_T)) \\
&= \frac{1}{2} \sigma^2 \text{Var}(G(T, \tilde{X}_T) - \tilde{X}_T \frac{\partial G_T}{\partial x}) \\
&= \frac{\sigma^2}{2} e^{-2rT} \text{Var}(f(X_T) - X_T f'(X_T)) \\
&= \frac{\sigma^2}{2} e^{-2rT} \text{Var}(B f(X_T)).
\end{aligned}$$

■

Le cas des calls et des puts européens

Corollaire 2.3.2 *Pour les calls et puts européens le risque résiduel de la couverture approchée élémentaire converge vers zéro à la même vitesse de $C\varepsilon + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}-})$. Pour le modèle Black-Scholes, C est donné par la formule :*

$$C = \frac{\sigma^2}{2} e^{-2rT} K^2 (N(d_2) - (N(d_2))^2) \quad (2.64)$$

où :

$$d_2 = \frac{\log\left(\frac{x_0}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}. \quad (2.65)$$

Notons que ceci implique que $C \leq \frac{\sigma^2 K^2 e^{-2rT}}{8}$.

Démonstration : Il suffit de vérifier que les dérivés des fonctions définissant les calls et puts européens satisfont l'hypothèse **(H1)** . C'est évident puisque les dérivés sont des fonctions d'indicatrice, donc bornées.

Pour calculer C , on utilise la proposition 2.3.1, et l'on obtient :

$$\begin{aligned} C &= \frac{\sigma^2}{2} e^{-2rT} \text{Var}(Bf(X_T)) \\ &= \frac{\sigma^2}{2} e^{-2rT} \text{Var}(-K \mathbf{1}_{\{X_T > K\}}) \\ &= \frac{\sigma^2}{2} e^{-2rT} K^2 (N(d_2) - (N(d_2))^2) \end{aligned}$$

■

La figure 2.1 représente l'indicateur de variance résiduelle de call (ou put) C suivant la valeur initiale du prix d'actif sous-jacent x , comparé avec le gamma à l'instant 0, avec $K = 10$, $r = 0.05$ et $\sigma = 0.2$.

Le cas d'une combinaison des options

Nous traitons, maintenant, un exemple de combinaison d'options, le bull spread. Cette combinaison consiste en l'achat d'un call de prix d'exercice K_1 et en la vente d'un call de prix d'exercice K_2 , de même échéance. On suppose de plus que $K_1 < K_2$. La fonction f définissant l'actif contingent est de la forme :

$$f(x) = (x - K_1)_+ - (x - K_2)_+.$$

Un calcul simple montre que :

$$\begin{aligned} Bf(x) &= B(x - K_1)_+ - B(x - K_2)_+ \\ &= \mathbf{1}_{x \geq K_1} - \mathbf{1}_{x \geq K_2}. \end{aligned}$$

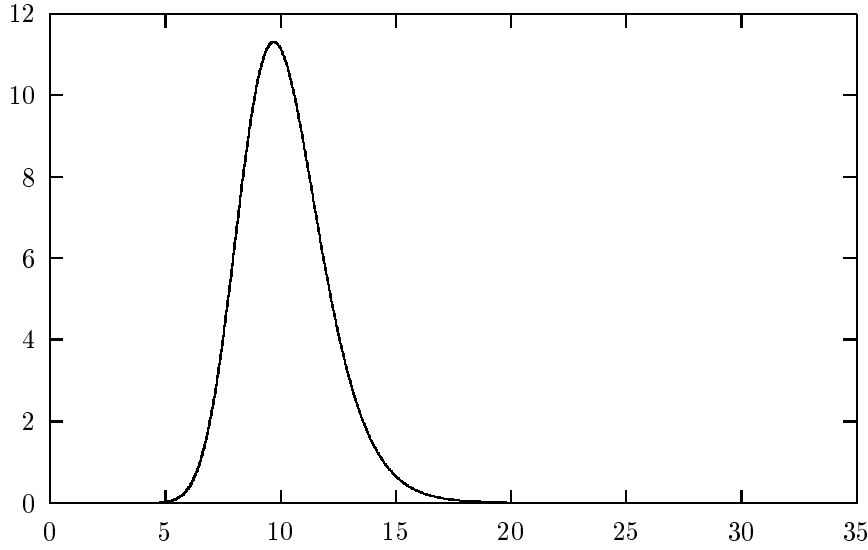


FIG. 2.1 – Indicateur résiduel du call et du put suivant prix initial d'actif sous-jacent

Et, il est facile d'en déduire que l'indicateur de variance résiduelle C vaut :

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{\sigma^2}{2} e^{-2rT} \text{Var}(Bf(X_T)) \\
 &= \frac{\sigma^2}{2} e^{-2rT} (\text{Var}(1_{X_T \geq K_1}) + \text{Var}(1_{X_T \geq K_2}) - \text{Cov}(1_{X_T \geq K_1}, 1_{X_T \geq K_2})) \\
 &= \frac{\sigma^2}{2} e^{-2rT} (K_1^2 N(d_2^{K_1})(1 - N(d_2^{K_1})) + K_2^2 N(d_2^{K_2})(1 - N(d_2^{K_2})) \\
 &\quad - 2K_1 K_2 N(d_2^{K_2})(1 - N(d_2^{K_1}))),
 \end{aligned}$$

avec :

$$d_2^{K_1} = \frac{\log\left(\frac{x_0}{K_1}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2^{K_2} = \frac{\log\left(\frac{x_0}{K_2}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

La figure 2.2 montre l'indicateur de variance résiduelle de bull spread en fonction de la valeur initiale du prix de l'actif sous-jacent, dans le cas où $K_1 = 9$, $K_2 = 11$, $r = 0.05$, et $\sigma = 0.2$:

2.4 Risque Résiduel Sous la Probabilité Initiale

Dans la section 2.1, on a étudié le risque résiduel quadratique pour certaines couvertures approchées sous la probabilité risque neutre $\tilde{\mathbf{P}}$, le théorème 2.1.2 montre que ce risque résiduel tend vers 0 à une vitesse d'ordre ε . Comme cela n'implique pas forcément que ce risque résiduel tend aussi vers 0 à la même vitesse sous la probabilité initiale, alors que dans la pratique on se trouve plutôt sous la probabilité initiale. Dans

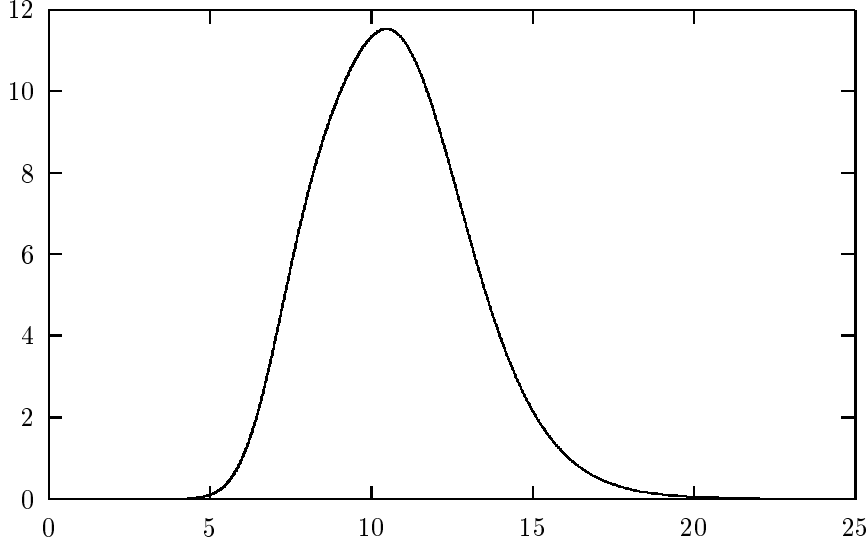


FIG. 2.2 – Indicateur résiduel d'un bull spread suivant prix initial d'actif sous-jacent

cette section nous nous intéressons au comportement asymptotique du risque résiduel de couverture sous la probabilité initiale.

On utilise, ici, le même modèle d'actifs que dans la section 2.1, mais nous le considérons sous la probabilité initiale. Le couple (X_t, X_t^0) est donc solution de :

$$\begin{cases} \frac{dX_t^0}{X_t^0} = r dt \\ \frac{d\tilde{X}_t}{\tilde{X}_t} = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t. \end{cases}$$

Le taux sans risque r est toujours supposé constant, $\mu(t, x)$ et $\sigma(t, x)$ bornées et de classe $C^{1,\infty}([0, T] \times \mathbf{R})$, et $x \frac{\partial \mu}{\partial x}$, $x \frac{\partial \sigma}{\partial x}$, $x^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}$ et $x^3 \frac{\partial^3 \sigma}{\partial x^3}$ uniformément bornées.

On note toujours $\tilde{X}_t = e^{-rt}X_t$ et $\tilde{V}_t = e^{-rt}V_t$. \tilde{X}_t satisfait alors :

$$\frac{d\tilde{X}_t}{\tilde{X}_t} = (\mu(t, X_t) - r)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$$

Si on utilise la même stratégie de couverture élémentaire que dans les sections précédentes, la couverture est biaisée sous la probabilité initiale, et le biais est

$$\begin{aligned} b_\varepsilon &= \mathbf{E}(V_T - V_T^\varepsilon) \\ &= e^{rt} \mathbf{E} \left(\int_0^T (H_t - H_t^\varepsilon) d\tilde{X}_t \right) \\ &= e^{rt} \mathbf{E} \left(\int_0^T (H_t - H_t^\varepsilon) (\mu(t, X_t) - r) \tilde{X}_t dt \right) \end{aligned}$$

On voit facilement que le biais d'espérance est d'ordre ε . Donc dans la réalité quand on couvre une option, surtout quand le nombre de couverture n'est pas grand, la couverture

élémentaire donne un biais, mais de l'ordre plus petit que l'écart-type de erreur. Donc si on couvre plutôt fréquemment, on peut choisir la couverture élémentaire, sinon il faut prendre une couverture non biaisée. C'est à dire, choisir un $V_0^\varepsilon = V_0 - b_\varepsilon$. Un développement de b_ε est facile à obtenir, et facile à calculer dans le cas du call sous le modèle de Black-Scholes.

Le risque résiduel est défini maintenant comme

$$R^\varepsilon = e^{-2rT} \mathbf{E}(V_T - V_T^\varepsilon)^2 = \mathbf{E}(\tilde{V}_T - \tilde{V}_T^\varepsilon)^2.$$

Si $\{H_t^\varepsilon\}_{t \in [0, T]}$ est une stratégie de couverture approchée, on a :

$$\begin{aligned} R^\varepsilon &= \mathbf{E} \left(\int_0^T (V_0 - V_0^\varepsilon + H_t - H_t^\varepsilon) d\tilde{X}_t \right)^2 \\ &= \mathbf{E} \left(\int_0^T (H_t - H_t^\varepsilon) \sigma_t \tilde{X}_t dW_t + \int_0^T (H_t - H_t^\varepsilon) (\mu(t, X_t) - r) \tilde{X}_t dt \right)^2 \\ &= \mathbf{E} \left(\int_0^T (H_t - H_t^\varepsilon) \sigma_t \tilde{X}_t dW_t \right)^2 \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$+ 2\mathbf{E} \left(\int_0^T (H_t - H_t^\varepsilon) \sigma_t \tilde{X}_t dW_t \right) \left(\int_0^T (H_t - H_t^\varepsilon) (\mu(t, X_t) - r) \tilde{X}_t dt \right) \quad (2.67)$$

$$+ \mathbf{E} \left(\int_0^T (H_t - H_t^\varepsilon) (\mu(t, X_t) - r) \tilde{X}_t dt \right)^2 \quad (2.68)$$

Nous étudierons uniquement le risque résiduel de la couverture approchée élémentaire. Notre résultat essentiel est le suivant.

Théorème 2.4.1 *Sous l'hypothèse (H1) on a :*

(i)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{R_\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \left(\int_0^T e^{-2rt} X_t^4 \sigma_t^4 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, X_t) \right)^2 dt \right). \quad (2.69)$$

(ii) Si de plus (H2) est vérifié, alors si $f(x) = (x - K)_+$ le cas de call ou $f(x) = (K - x)_+$ le cas de put, ou si f est deux fois dérivable avec

$$|f''(x)| \leq C(1 + |x|^\alpha),$$

on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{R_\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \left(\int_0^T e^{-2rt} X_t^4 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, X_t) \right)^2 \sigma^4(t, X_t) dt \right) + O(\varepsilon^{1/2-}). \quad (2.70)$$

Remarque 2.4.2 Donc dans le cadre de couverture approchée élémentaire, on a exactement les même formules que dans théorème 2.1.2, mais l'espérance est faite ici sous la probabilité initiale.

Nous allons déduire le théorème 2.4.1 de la proposition suivante.

Proposition 2.4.3 *Si $(H_t^\varepsilon)_{0 \leq t \leq T}$ est la couverture approchée élémentaire, le risque résiduel sous la probabilité initiale peut s'écrire comme :*

$$\begin{aligned} R^\varepsilon &= \mathbf{E} \left(\int_0^T (H_t - H_t^\varepsilon) \sigma_t \tilde{X}_t dW_t \right)^2 + o(\varepsilon^{\frac{3}{2}-}), \\ &= \mathbf{E} \left(\int_0^T (H_t - H_t^\varepsilon)^2 \sigma_t^2 \tilde{X}_t^2 dt \right) + o(\varepsilon^{\frac{3}{2}-}). \end{aligned}$$

Remarque 2.4.4 Évidemment, cela veut dire que (2.67) et (2.68) sont au plus d'ordre $o(\varepsilon^{\frac{3}{2}-})$. Remarquons que ce résultat est vrai pour tout portefeuille de couverture $H \in \mathcal{M}^2(\mathbf{P})$, par exemple, certaines options asiatiques.

On montre maintenant la proposition 2.4.3.

Démonstration : La schémas de la démonstration est le suivant. On commence par montrer que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{E}(\int_0^T (H_t - H_t^\varepsilon) \sigma_t \tilde{X}_t dW_t)^2}{\varepsilon} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \left(\int_0^T e^{-2rt} X_t^4 \sigma_t^4 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, X_t) \right)^2 dt \right). \quad (2.71)$$

Ceci, s'obtient de la même façon de la démonstration du théorème 2.1.2.

Puis on démontre les deux résultats suivants : (2.67) est d'ordre $O(\varepsilon^{\frac{3}{2}-})$, puis (2.68) est d'ordre $O(\varepsilon^{\frac{3}{2}})$.

Commençons par le premier résultat. On a vu dans la section 2.2.5 que le processus de couverture parfaite H_t pouvait s'écrire sous la forme :

$$H_t = H_0 + \int_0^t a_u du + \int_0^t b_u dW_u,$$

avec :

$$\mathbf{E} \left(\int_0^T a_t^2 dt \right)^p < \infty \text{ et } \mathbf{E} \left(\int_0^T b_t^2 dt \right)^p < \infty.$$

Donc H est dans $\mathcal{M}^2(\mathbf{Q})$ sur $[0, T]$, pour toute probabilité dans $\mathbf{Q} \simeq \mathbf{P}$.

Notons que, pour $t \in [k\varepsilon, (k+1)\varepsilon[$:

$$H_t - H_{k\varepsilon} = \int_{k\varepsilon}^t a_u du + \int_{k\varepsilon}^t b_u dW_u.$$

On en déduit que (2.67) s'écrit comme :

$$\begin{aligned} & 2\mathbf{E}\left(\int_0^T (H_t - H_t^\varepsilon)\sigma_t \tilde{X}_t dW_t\right)\left(\int_0^T (H_t - H_t^\varepsilon)(\mu(t, X_t) - r)\tilde{X}_t dt\right) \\ = & 2\mathbf{E}\left(\int_0^T (H_t - H_t^\varepsilon)\sigma_t \tilde{X}_t dW_t\right)\left(\int_0^T \left(\int_{k\varepsilon}^t a_u du + \int_{k\varepsilon}^t b_u dW_u\right)(\mu(t, X_t) - r)\tilde{X}_t dt\right) \\ = & 2\mathbf{E}\left(\int_0^T (H_t - H_t^\varepsilon)\sigma_t \tilde{X}_t dW_t\right)\left(\int_0^T \left(\int_{k\varepsilon}^t a_u du\right)(\mu(t, X_t) - r)\tilde{X}_t dt\right) \end{aligned} \quad (2.72)$$

$$+ 2\mathbf{E}\left(\int_0^T (H_t - H_t^\varepsilon)\sigma_t \tilde{X}_t dW_t\right)\left(\int_0^T \left(\int_{k\varepsilon}^t b_u dW_u\right)(\mu(t, X_t) - r)\tilde{X}_t dt\right) \quad (2.73)$$

Il suffit donc de montrer que (2.72) et (2.73) sont d'ordre $O(\varepsilon^{\frac{3}{2}-})$.

Pour (2.72), notons que sa valeur absolue est plus petite que :

$$\begin{aligned} & 2 \left(\mathbf{E} \left(\int_0^T (H_t - H_t^\varepsilon)\sigma_t \tilde{X}_t dW_t \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbf{E} \left(\int_0^T \left(\int_{k\varepsilon}^t a_u du \right) (\mu(t, X_t) - r) \tilde{X}_t dt \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \leq & C \left(\mathbf{E} \int_0^T (H_t - H_t^\varepsilon)^2 \sigma_t^2 \tilde{X}_t^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbf{E} \int_0^T \left(\int_{k\varepsilon}^t a_u du \right)^2 \tilde{X}_t^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ \leq & C \left(\mathbf{E} \int_0^T (H_t - H_t^\varepsilon)^2 \sigma_t^2 \tilde{X}_t^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\varepsilon \mathbf{E} \int_0^T \int_{k\varepsilon}^t a_u^2 du \tilde{X}_t^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ = & C \left(\mathbf{E} \int_0^T (H_t - H_t^\varepsilon)^2 \sigma_t^2 \tilde{X}_t^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\varepsilon \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^t a_u^2 du \tilde{X}_t^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ \leq & C \left(\mathbf{E} \int_0^T (H_t - H_t^\varepsilon)^2 \sigma_t^2 \tilde{X}_t^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\varepsilon^2 \mathbf{E} \sup_{t \leq T} \tilde{X}_t^2 \int_0^T a_u^2 du \right)^{\frac{1}{2}} \\ \leq & C\varepsilon \left(\mathbf{E} \int_0^T (H_t - H_t^\varepsilon)^2 \sigma_t^2 \tilde{X}_t^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbf{E} \sup_{t \leq T} \tilde{X}_t^4 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbf{E} \left(\int_0^T a_u^2 du \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Les deux derniers facteurs sont finis, et l'on a, d'après 2.71 :

$$\mathbf{E} \int_0^T (H_t - H_t^\varepsilon)^2 \sigma_t^2 \tilde{X}_t^2 dt$$

qui est d'ordre $O(\varepsilon)$, donc (2.72) est au plus d'ordre $O(\varepsilon^{\frac{3}{2}})$.

Pour contrôler le terme (2.73), on le réécrit sous la forme :

$$2\mathbf{E} \left(\int_0^T (H_t - H_t^\varepsilon)\sigma_t \tilde{X}_t dW_t \right) \left(\int_0^T \left(\int_{k\varepsilon}^t b_u dW_u \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
& ((\mu(t, X_{k\varepsilon}) - r)e^{-rt}X_{k\varepsilon} + ((\mu(t, X_t) - r)\tilde{X}_t - (\mu(t, X_{k\varepsilon}) - r)e^{-rt}X_{k\varepsilon}))dt) \\
= & 2\mathbf{E} \left(\int_0^T (H_t - H_t^\varepsilon) \sigma_t \tilde{X}_t dW_t \right) \left(\int_0^T \left(\int_{k\varepsilon}^t b_u dW_u \right) (\mu(t, X_{k\varepsilon}) - r)e^{-rt}X_{k\varepsilon} dt \right) \\
& + 2\mathbf{E} \left(\int_0^T (H_t - H_t^\varepsilon) \sigma_t \tilde{X}_t dW_t \right) \\
& \left(\int_0^T \left(\int_{k\varepsilon}^t b_u dW_u \right) ((\mu(t, X_t) - r)\tilde{X}_t - (\mu(t, X_{k\varepsilon}) - r)e^{-rt}X_{k\varepsilon}) dt \right),
\end{aligned}$$

et l'on note que compte tenu du caractère lipschitzien de $x\mu(t, x)$ en x , on a :

$$|(\mu(t, X_t) - r)\tilde{X}_t - (\mu(t, X_{k\varepsilon}) - r)e^{-rt}X_{k\varepsilon}| \leq C|X_t - X_{k\varepsilon}|$$

donc la valeur absolue du second terme de cette somme est plus petit que :

$$\begin{aligned}
& C \left(\mathbf{E} \left(\int_0^T (H_t - H_t^\varepsilon) \sigma_t \tilde{X}_t dW_t \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbf{E} \left(\int_0^T \left| \int_{k\varepsilon}^t b_u dW_u \right| |X_t - X_{k\varepsilon}| dt \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
\leq & C \left(\mathbf{E} \left(\int_0^T (H_t - H_t^\varepsilon) \sigma_t \tilde{X}_t dW_t \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbf{E} \left(\int_0^T \left(\int_{k\varepsilon}^t b_u dW_u \right)^2 |X_t - X_{k\varepsilon}|^2 dt \right) \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

mais le premier facteur est d'ordre $O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$, et on peut montrer sans difficulté que le deuxième facteur est d'ordre $O(\varepsilon^{1-})$. On en déduit que :

$$2\mathbf{E} \left(\int_0^T (H_t - H_t^\varepsilon) \sigma_t \tilde{X}_t dW_t \right) \left(\int_0^T \left(\int_{k\varepsilon}^t b_u dW_u \right) (\mu(t, X_{k\varepsilon}) - r)e^{-rt}X_{k\varepsilon} dt \right) + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}-}).$$

Par la définition de la couverture élémentaire, on développe ceci par

$$\begin{aligned}
& 2\mathbf{E} \left(\int_0^T (H_t - H_t^\varepsilon) \sigma_t \tilde{X}_t dW_t \right) \left(\int_0^T \left(\int_{k\varepsilon}^t b_u (\mu(t, X_{k\varepsilon}) - r)e^{-rt}X_{k\varepsilon} dW_u \right) dt \right) + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}-}) \\
= & 2\mathbf{E} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} (H_t - H_\varepsilon) \sigma_t \tilde{X}_t dW_t \right) \\
& \left(\sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t b_u (\mu(t, X_{k\varepsilon}) - r)e^{-rt}X_{k\varepsilon} dW_u \right) dt \right) + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}-}) \\
= & 2\mathbf{E} \sum_{k,m=0}^{N-1} \left(\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} (H_t - H_\varepsilon) \sigma_t \tilde{X}_t dW_t \right) \\
& \left(\int_{m\varepsilon}^{(m+1)\varepsilon} \left(\int_{m\varepsilon}^t b_u (\mu(t, X_{m\varepsilon}) - r)e^{-rt}X_{m\varepsilon} dW_u \right) dt \right).
\end{aligned}$$

Maintenant, en remarquant que si $k \neq m$, les deux facteurs de la somme sont orthogonaux, on en déduit que, ceci est égal à :

$$2\mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} (H_t - H_\varepsilon) \sigma_t \tilde{X}_t dW_t \right) \left(\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t b_u (\mu(t, X_{k\varepsilon}) - r) \right) \right)$$

$$e^{-rt} X_{k\varepsilon} dW_u) dt) + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}-}).$$

Sa valeur absolue est, donc, plus petite que :

$$\begin{aligned}
& 2 \left(\mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} (H_t - H_{k\varepsilon}) \sigma_t \tilde{X}_t dW_t \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \left(\mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t b_u (\mu(t, X_{k\varepsilon}) - r) e^{-rt} X_{k\varepsilon} dW_u \right) dt \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}-}) \\
& \leq C \left(\mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} (H_t - H_{k\varepsilon})^2 \sigma_t^2 \tilde{X}_t^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \left(\mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t b_u X_{k\varepsilon} dW_u \right) dt \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}-}) \\
& \leq C \left(\mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} (H_t - H_{k\varepsilon})^2 \sigma_t^2 \tilde{X}_t^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \left(\varepsilon \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t b_u X_{k\varepsilon} dW_u \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}-}) \\
& = C \left(\mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} (H_t - H_{k\varepsilon})^2 \sigma_t^2 \tilde{X}_t^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \left(\varepsilon \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^t b_u^2 X_{k\varepsilon}^2 du dt \right)^{\frac{1}{2}} + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}-}) \\
& \leq C \left(\mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} (H_t - H_{k\varepsilon})^2 \sigma_t^2 \tilde{X}_t^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \left(\varepsilon^2 \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} b_u^2 X_{k\varepsilon}^2 du \right)^{\frac{1}{2}} + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}-}) \\
& \leq C\varepsilon \left(\mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} (H_t - H_{k\varepsilon})^2 \sigma_t^2 \tilde{X}_t^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \left(\mathbf{E} \sup_{t \leq T} X_t^4 \right)^{\frac{1}{4}} \left(\mathbf{E} \left(\int_0^T b_u^2 du \right)^2 \right)^{\frac{1}{4}} + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}-}).
\end{aligned}$$

On en déduit que (2.73) est au plus d'ordre $O(\varepsilon^{\frac{3}{2}-})$.

Comme on a déjà montré que (2.72) est d'ordre $O(\varepsilon^{\frac{3}{2}-})$, (2.67) est aussi d'ordre $O(\varepsilon^{\frac{3}{2}-})$.

Nous montrons maintenant que (2.68) est aussi d'ordre $O(\varepsilon^{\frac{3}{2}})$. Pour cela, commençons par noter que (2.68) peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E} \left(\sum_k \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} (H_t - H_t^\varepsilon) (\mu(t, X_t) - r) \tilde{X}_t dt \right)^2 \\
&= \mathbf{E} \left(\sum_k \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t a_u du \right) (\mu(t, X_t) - r) \tilde{X}_t dt \right. \\
&\quad \left. + \sum_k \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t b_u dW_u \right) (\mu(t, X_t) - r) \tilde{X}_t dt \right)^2 \\
&\leq 2\mathbf{E} \left(\sum_k \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t a_u du \right) (\mu(t, X_t) - r) \tilde{X}_t dt \right)^2 \\
&\quad + 2\mathbf{E} \left(\sum_k \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t b_u dW_u \right) (\mu(t, X_t) - r) \tilde{X}_t dt \right)^2 \\
&\leq C\mathbf{E} \left(\sum_k \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t a_u du \right) X_t dt \right)^2 \tag{2.74}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C\mathbf{E} \left(\sum_k \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t b_u dW_u \right) X_t dt \right)^2 \tag{2.75}
\end{aligned}$$

Pour la première partie, notons que l'on a :

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E} \left(\sum_k \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t a_u du \right) X_t dt \right)^2 \\
&\leq \mathbf{E} \sum_k \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\left(\int_{k\varepsilon}^t a_u du \right) X_t \right)^2 dt \\
&\leq \varepsilon \mathbf{E} \sum_k \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t a_u^2 du \right) X_t^2 dt \\
&\leq \varepsilon \mathbf{E} \sup_t |X_t| \sum_k \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t a_u^2 du \right) dt \\
&\leq \varepsilon^2 \mathbf{E} \sup_t |X_t| \sum_k \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} a_u^2 du \\
&= \varepsilon^2 \mathbf{E} \sup_t |X_t| \int_0^T a_u^2 du
\end{aligned}$$

En utilisant le lemme 2.2.28, on montre que ceci est plus petit que $C\varepsilon^2$. Pour montrer le lemme il suffit de montrer que la seconde partie de (2.75) est de $O(\varepsilon^{\frac{3}{2}})$, soit :

$$\mathbf{E} \left(\sum_k \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t b_u dW_u \right) X_t dt \right)^2 \sim O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}), \tag{2.76}$$

or :

$$\mathbf{E} \left(\sum_k \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t b_u dW_u \right) X_t dt \right)^2 \sim O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}) \quad (2.77)$$

$$\begin{aligned} &= \mathbf{E} \left(\sum_k \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t b_u dW_u \right) (X_{k\varepsilon} + (X_t - X_{k\varepsilon})) dt \right)^2 \\ &\leq \mathbf{E} \left(\sum_k \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t b_u dW_u \right) X_{k\varepsilon} dt + \sum_k \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t b_u dW_u \right) (X_t - X_{k\varepsilon}) dt \right)^2 \\ &\leq 2\mathbf{E} \left(\sum_k \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t b_u X_{k\varepsilon} dW_u \right) dt \right)^2 \\ &\quad + C\mathbf{E} \left(\sum_k \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t b_u dW_u \right)^2 (X_t - X_{k\varepsilon})^2 dt \right) \end{aligned} \quad (2.78)$$

Pour le premier terme de ce somme, on remarque que :

$$\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t b_u X_{k\varepsilon} dW_u \right) dt, \quad k = 0, N-1$$

constitue une série orthogonale, donc :

$$\begin{aligned} &2\mathbf{E} \left(\sum_k \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t b_u X_{k\varepsilon} dW_u \right) dt \right)^2 \\ &= 2\mathbf{E} \sum_k \left(\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t b_u X_{k\varepsilon} dW_u \right) dt \right)^2 \\ &\leq 2\varepsilon \mathbf{E} \sum_k \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t b_u X_{k\varepsilon} dW_u \right)^2 dt \\ &\leq 2\varepsilon \mathbf{E} \sum_k \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t b_u^2 X_{k\varepsilon}^2 du \right) dt \\ &\leq 2\varepsilon^2 \mathbf{E} \sum_k \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} b_u^2 X_{k\varepsilon}^2 du \\ &\leq 2\varepsilon^2 \mathbf{E} \sup_t |X_t|^2 \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} b_u^2 du \\ &= 2\varepsilon^2 \mathbf{E} \sup_t |X_t|^2 \int_0^T b_u^2 du. \end{aligned}$$

Le premier terme de (2.78) est donc d'ordre de ε^2 .

Pour traiter le second terme de (2.78) notons que :

$$\mathbf{E} \left(\sum_k \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t b_u dW_u \right)^2 (X_t - X_{k\varepsilon})^2 dt \right)$$

$$\leq \left(\mathbf{E} \left(\sum_k \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t b_u dW_u \right)^4 dt \right) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbf{E} \sum_k \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} (X_t - X_{k\varepsilon})^4 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.79)$$

D'après inégalité de Doob, le premier facteur est plus petit que :

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{E} \sum_k \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t b_u^2 du \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\varepsilon \mathbf{E} \sum_k \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} b_u^2 du \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\varepsilon \mathbf{E} \left(\sum_k \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} b_u^2 du \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left(\mathbf{E} \left(\int_0^T b_u^2 du \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Donc le premier facteur de (2.79) est d'ordre $O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$.

Pour le second facteur, on utilise le lemme 2.2.15, pour noter que :

$$\sup_k \mathbf{E} \sup_{k\varepsilon \leq t \leq (k+1)\varepsilon} (X_t - X_{k\varepsilon})^4 \sim \varepsilon^2$$

et en déduire que :

$$\left(\mathbf{E} \sum_k \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} (X_t - X_{k\varepsilon})^4 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\mathbf{E} \sum_k \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} C \varepsilon^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \sim \varepsilon.$$

Donc (2.79) est d'ordre $\varepsilon^{\frac{1}{2}} \varepsilon = \varepsilon^{\frac{3}{2}}$. On en déduit que le second terme de (2.78) est d'ordre $\varepsilon^{\frac{3}{2}}$. Enfin, vu que le premier terme est d'ordre ε^2 , (2.78) est d'ordre $O(\varepsilon^{\frac{3}{2}})$. Ceci prouve (2.76) et le résultat attendu. ■

2.5 Coût de transaction

Dans la pratique, le coût de transaction est proportionnel à la quantité de transaction. Comme le processus de couverture H_t est un processus d'Ito, intuitivement quand la fréquence d'intervention est devenue grande, le coût de transaction risque de devenir très grand aussi.

On étudie ici la tendance de l'espérance de coût de transaction quand la fréquence d'intervention tend vers à l'infini. On ne considère ici que le cas de la couverture élémentaire, c'est à dire on couvre l'option à chaque instant d'intervention avec l'actif risqué dont la quantité est justement la couverture parfaite à cette instant.

Si on intervient N fois, avec $\varepsilon = \frac{T}{N}$, à l'instant $k\varepsilon, k = 1..N-1$, on a la quantité $H_{k\varepsilon}$ de l'actif risqué, et à l'instant $(k+1)\varepsilon$, on doit avoir $H_{(k+1)\varepsilon}$, de l'actif risqué. La transaction de l'actif se passe à l'instant $(k+1)\varepsilon$ est

$$|H_{(k+1)\varepsilon} - H_{k\varepsilon}| X_{(k+1)\varepsilon},$$

en toute la période $[0, T]$ le coût de transaction est

$$\sum_{k=0}^{N-1} |H_{(k+1)\varepsilon} - H_{k\varepsilon}| X_{(k+1)\varepsilon}.$$

On va évaluer l'espérance du coût de transaction sous la probabilité initiale:

$$C^\varepsilon = \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} |H_{(k+1)\varepsilon} - H_{k\varepsilon}| X_{(k+1)\varepsilon}.$$

Par (2.24) on a que sous la probabilité $\bar{\mathbf{P}}$,

$$dH_t = \frac{\partial H_t}{\partial x} X_t \sigma_t d\bar{W}_t,$$

et sous la probabilité initiale \mathbf{P} , on a

$$dH_t = \frac{\partial H_t}{\partial x} X_t \sigma_t dW_t + a_t \frac{\partial H_t}{\partial x} X_t \sigma_t dt$$

avec

$$a_t = \frac{\mu_t - r}{\sigma_t} - (\sigma_t + X_t \sigma'_t)$$

qui est un processus continu et uniformément borné.

Donc on peut réécrire

$$C^\varepsilon = \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \left| \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \frac{\partial H_t}{\partial x} X_t \sigma_t dW_t + a_t \frac{\partial H_t}{\partial x} X_t \sigma_t dt \right| X_{(k+1)\varepsilon} \quad (2.80)$$

donc C^ε est contrôlé par

$$\begin{aligned} |C^\varepsilon| &\leq \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \left| \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \frac{\partial H_t}{\partial x} X_t \sigma_t dW_t \right| X_{(k+1)\varepsilon} + \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left| a_t \frac{\partial H_t}{\partial x} X_t \sigma_t \right| dt X_{(k+1)\varepsilon} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \left| \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \frac{\partial H_t}{\partial x} X_t \sigma_t dW_t \right|^2 X_{(k+1)\varepsilon}^2 \\ &\quad + \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left| a_t \frac{\partial H_t}{\partial x} X_t \sigma_t \right| dt X_{(k+1)\varepsilon} \end{aligned}$$

par théorème de Girsanov, sous une nouvelle probabilité \mathbf{Q} , le premier terme est plus petit que

$$\begin{aligned} &C \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \sum_{k=0}^{N-1} \left| \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \frac{\partial H_t}{\partial x} X_t \sigma_t dW_t \right|^2 \\ &= C \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left| \frac{\partial H_t}{\partial x} X_t \sigma_t \right|^2 dt \\ &= C \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \int_0^T \left| \frac{\partial H_t}{\partial x} X_t \sigma_t \right|^2 dt \end{aligned}$$

donc c'est un $O(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})$. Par la même raison, on a pour le deuxième terme

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left| a_t \frac{\partial H_t}{\partial x} X_t \sigma_t \right| dt X_{(k+1)\varepsilon} \\
& \leq \left(\mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left| a_t \frac{\partial H_t}{\partial x} X_t \sigma_t X_{(k+1)\varepsilon} \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq C_1 \left(\mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left| \frac{\partial H_t}{\partial x} X_t \sigma_t X_{(k+1)\varepsilon} \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq C_2 \left(\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left| \frac{\partial H_t}{\partial x} X_t \sigma_t \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq C_2 \left(\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \int_0^T \left| \frac{\partial H_t}{\partial x} X_t \sigma_t \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.81}
\end{aligned}$$

donc c'est un $O(1)$. En tout C_ε est au plus un $O(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})$.

Dans certains cas, on peut avoir de résultat plus fine:

Proposition 2.5.1 *Quand l'hypothèse (H2) est vérifié, et la fonction de l'actif contingent f est deux fois continument dérivable avec*

$$|f''(x)| \leq L(1 + |x|^\alpha)$$

ou bien qu'il si $f(x) = (x - K)_+$ ou $(K - x)_+$, on a

$$C^\varepsilon \sim \sqrt{\frac{2}{\varepsilon\pi}} \mathbf{E} \int_0^T \left| \frac{\partial H_t}{\partial x} X_t^2 \sigma_t \right| dt$$

Par proposition 2.2.8 on a corollaire suivant :

Corollaire 2.5.2 *Sous les conditions de lemme 2.2.30, pour tout $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$, on a*

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \sum_k \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\frac{\partial H_t}{\partial x} X_t \sigma_t - \frac{\partial H_{k\varepsilon}}{\partial x} X_{k\varepsilon} \sigma_{k\varepsilon} \right)^2 dt \sim O(\varepsilon)$$

Pour les cas de call ou put on a lemme suivant:

Lemme 2.5.3 *Dans les cas de call ou put, $\forall 0 < \eta < T$, sur l'intervalle du temps $[0, T - \eta]$, on a $\frac{\partial H}{\partial x} \in \mathcal{M}^2(\mathbf{P})$, ainsi que $\frac{\partial H_t}{\partial x} X_t \sigma_t$ et $\frac{\partial H_t}{\partial x} X_t^2 \sigma_t$.*

Démonstration : On ne montre que pour le cas de call, le cas de put est identique.

Comme on a vu,

$$\frac{\partial H}{\partial x}(t, X_t) = \bar{p}(t, T; Y_t, \log K),$$

$\bar{\bar{p}}$ est la solution fondamentale associée à l'opérateur parabolique M défini dans (2.40).

Donc avec les notations b_t et β_t définis dans (2.32), par formule d'Ito,

$$\begin{aligned} dH_t\beta_t &= d\bar{\bar{p}}(t, T; Y_t, \log K)\beta_t \\ &= \beta_t d\bar{\bar{p}}(t, T; Y_t, \log K) + \bar{\bar{p}}(t, T; Y_t, \log K)d\beta_t \\ &= \beta_t \left(\frac{\partial \bar{\bar{p}}}{\partial t} + \bar{\bar{A}}_Y \bar{\bar{p}} \right)(t, T; Y_t, \log K)dt \\ &\quad + \beta_t \frac{\partial p}{\partial x} \sigma(t, e^{Y_t}) d\bar{\bar{W}}_t + \bar{\bar{p}}(t, T; Y_t, \log K) \beta_t b_t dt \\ &= \beta_t \left(\frac{\partial \bar{\bar{p}}}{\partial t} + \bar{\bar{A}}_Y b_t \bar{\bar{p}} \right) + \beta_t \frac{\partial p}{\partial x} \sigma(t, e^{Y_t}) d\bar{\bar{W}}_t. \end{aligned}$$

Soit, maintenant, $\bar{\bar{p}}$ la solution élémentaire de (voir l'équation 2.40 pour la définition de $\bar{\bar{A}}_Y$) :

$$\frac{\partial \bar{\bar{p}}}{\partial t} + \bar{\bar{A}}_Y \bar{\bar{p}} + b(t, x) \bar{\bar{p}} = 0,$$

alors, on a :

$$d \frac{\partial H_t}{\partial x} \beta_t = \beta_t \frac{\partial \bar{\bar{p}}}{\partial x} \sigma(t, e^{Y_t}) d\bar{\bar{W}}_t$$

par théorème 1.3.3(i), on a

$$\left| \frac{\partial \bar{\bar{p}}}{\partial x}(t, T; x, y) \right| \leq C(s - t)^{-1} \exp(-c \frac{|x - y|^2}{s - t})$$

donc $\frac{\partial H_t}{\partial x} \beta_t$ est une martingale sur l'intervalle du temps $[0, T[$, et donc sur tout $[0, T - \eta]$. Et en plus $\frac{\partial H_{T-\eta}}{\partial x} \beta_{T-\eta}$ est dans tout $L^p, p > 1$, donc par lemme 2.2.3, $\frac{\partial H_t}{\partial x} \beta_t$ est dans $\mathcal{M}^2(\bar{\bar{P}})$ sur $[0, T - \eta]$. Or $\beta_t^{-1} \in \mathcal{N}^2(\bar{\bar{P}})$. Par lemme 2.2.7, $\frac{\partial H_t}{\partial x} \in \mathcal{M}^2(\bar{\bar{P}})$ sur $[0, T - \eta]$.

On voit également que $X_t \sigma_t$ et $X_t^2 \sigma_t$ sont dans $\mathcal{N}^2(\bar{\bar{P}})$, donc $\frac{\partial H_t}{\partial x} X_t \sigma_t$ et $\frac{\partial H_t}{\partial x} X_t^2 \sigma_t$ sont aussi dans $\mathcal{M}^2(\bar{\bar{P}})$ sur $[0, T - \eta]$. ■

Corollaire 2.5.4 *Dans les cas de call ou put, pour tout $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$, on a*

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \sum_k \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\frac{\partial H_t}{\partial x} X_t \sigma_t - \frac{\partial H_{k\varepsilon}}{\partial x} X_{k\varepsilon} \sigma_{k\varepsilon} \right)^2 dt \sim o(1) \quad (2.82)$$

et

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \sum_k \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\frac{\partial H_t}{\partial x} X_t^2 \sigma_t - \frac{\partial H_{k\varepsilon}}{\partial x} X_{k\varepsilon}^2 \sigma_{k\varepsilon} \right)^2 dt \sim o(1) \quad (2.83)$$

Démonstration : D'abord pour $\bar{p}(t, T; x, y)$ on a estimation

$$|\bar{p}(t, s; x, y)| \leq C(T-t)^{-1/2} \exp(-c \frac{|x-y|^2}{T-t})$$

donc

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial H}{\partial x} \right| &= |\bar{p}(t, T; Y_t, \log K)| \\ &\leq C(T-t)^{-1/2} \exp(-c \frac{|\log X_t - \log K|^2}{T-t}). \end{aligned}$$

On a donc estimation

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 &= \frac{C}{T-t} \int_{\mathbf{R}} \exp(-2c \frac{(y - \log K)^2}{T-t}) p(0, t; \log x_0, y) dy \\ &\leq \frac{C}{T-t} \int_{\mathbf{R}} \exp(-2c \frac{(y - \log K)^2}{T-t}) \frac{\exp(-\frac{(y - \log x_0)^2}{t})}{\sqrt{t}} dy \\ &\leq \frac{C}{\sqrt{T-t}}. \end{aligned} \tag{2.84}$$

L'estimation est vraie aussi pour $\frac{\partial H}{\partial x} X_t \sigma_t$ et $\frac{\partial H}{\partial x} X_t^2 \sigma_t$.

Prenons η assez petit, on écrit

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \sum_k \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\frac{\partial H_t}{\partial x} X_t \sigma_t - \frac{\partial H_{k\varepsilon}}{\partial x} X_{k\varepsilon} \sigma_{k\varepsilon} \right)^2 dt \\ = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \sum_{k\varepsilon \leq T-\eta} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\frac{\partial H_t}{\partial x} X_t \sigma_t - \frac{\partial H_{k\varepsilon}}{\partial x} X_{k\varepsilon} \sigma_{k\varepsilon} \right)^2 dt \\ + \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \sum_{k\varepsilon > T-\eta} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\frac{\partial H_t}{\partial x} X_t \sigma_t - \frac{\partial H_{k\varepsilon}}{\partial x} X_{k\varepsilon} \sigma_{k\varepsilon} \right)^2 dt \end{aligned}$$

puisque $\frac{\partial H_t}{\partial x} X_t \sigma_t \in \mathcal{M}^2(\mathbf{P})$ sur l'intervalle du temps $[0, T-\eta]$, alors par la proposition 2.2.8, le premier terme

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \sum_{k\varepsilon \leq T-\eta} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\frac{\partial H_t}{\partial x} X_t \sigma_t - \frac{\partial H_{k\varepsilon}}{\partial x} X_{k\varepsilon} \sigma_{k\varepsilon} \right)^2 dt \sim O(\varepsilon).$$

quant à le second terme, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \sum_{k\varepsilon > T-\eta} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\frac{\partial H_t}{\partial x} X_t \sigma_t - \frac{\partial H_{k\varepsilon}}{\partial x} X_{k\varepsilon} \sigma_{k\varepsilon} \right)^2 dt \\ \leq \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \sum_{k\varepsilon > T-\eta} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\frac{\partial H_t}{\partial x} X_t \sigma_t \right)^2 + \left(\frac{\partial H_{k\varepsilon}}{\partial x} X_{k\varepsilon} \sigma_{k\varepsilon} \right)^2 dt \end{aligned}$$

par l'estimation 2.84, ceci est plus petit que

$$C^{\mathbf{E}_Q} \sum_{k\varepsilon > T-\eta} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\frac{1}{T-t} + \frac{1}{T-k\varepsilon} \right) dt$$

évidemment ceci uniformément tend vers 0 quand η tend vers 0. Si l'on choisit η et ε assez petits, La somme des deux termes serait petit. Comme η est arbitraire, (2.82) est démontré. La démonstration de (2.83) est authentique. ■

Par corollaires 2.5.2 et 2.5.4 on a que sous la condition de proposition 2.5.1, (2.82) et (2.83) sont toujours vrai.

Démonstration : de proposition 2.5.1:

Par l'écriture de C^ε (2.80) et l'inégalité (2.81) on a

$$C^\varepsilon = \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \left| \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \frac{\partial H_t}{\partial x} X_t \sigma_t dW_t \right| X_{(k+1)\varepsilon} + O(1).$$

Ceci peut s'écrire comme

$$C^\varepsilon = \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \left| \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \frac{\partial H_t}{\partial x} X_t \sigma_t dW_t \right| X_{k\varepsilon} + e_1(\varepsilon) + O(1),$$

avec

$$e_1(\varepsilon) = \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \left| \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \frac{\partial H_t}{\partial x} X_t \sigma_t dW_t \right| (X_{(k+1)\varepsilon} - X_{k\varepsilon}),$$

en évaluant $e_1(\varepsilon)$, on a

$$\begin{aligned} |e_1(\varepsilon)| &\leq \left(\mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \frac{\partial H_t}{\partial x} X_t \sigma_t dW_t \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} (X_{(k+1)\varepsilon} - X_{k\varepsilon})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\mathbf{E} \int_0^T \left(\frac{\partial H_t}{\partial x} X_t \sigma_t \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} (X_{(k+1)\varepsilon} - X_{k\varepsilon})^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

le premier facteur est fini, comme X est une L^2 semi-martingale, donc le deuxième facteur est aussi fini, donc $e_1(\varepsilon)$ est au plus $O(1)$.

Alors on réécrit

$$\begin{aligned} C^\varepsilon &= \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \left| \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \frac{\partial H_t}{\partial x} X_t \sigma_t dW_t \right| X_{k\varepsilon} + O(1) \\ &= \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \left| \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \frac{\partial H_t}{\partial x} X_t \sigma_t X_{k\varepsilon} dW_t \right| + O(1) \\ &= \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \left| \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \frac{\partial H_{k\varepsilon}}{\partial x} X_{k\varepsilon} \sigma_{k\varepsilon} X_{k\varepsilon} dW_t \right. \\ &\quad \left. + \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\frac{\partial H_t}{\partial x} X_t \sigma_t - \frac{\partial H_{k\varepsilon}}{\partial x} X_{k\varepsilon} \sigma_{k\varepsilon} \right) X_{k\varepsilon} dW_t \right| + O(1). \end{aligned}$$

On évalue

$$e_2(\varepsilon) = \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \left| \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\frac{\partial H_t}{\partial x} X_t \sigma_t - \frac{\partial H_{k\varepsilon}}{\partial x} X_{k\varepsilon} \sigma_{k\varepsilon} \right) X_{k\varepsilon} dW_t \right|,$$

remarquons que l'écart entre C^ε et

$$\mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \left| \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \frac{\partial H_{k\varepsilon}}{\partial x} X_{k\varepsilon} \sigma_{k\varepsilon} X_{k\varepsilon} dW_t \right|$$

est contrôlé par $e_2(\varepsilon) + O(1)$.

$$\begin{aligned} e_2(\varepsilon) &\leq \mathbf{E} \sup_t X_t \sum_{k=0}^{N-1} \left| \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\frac{\partial H_t}{\partial x} X_t \sigma_t - \frac{\partial H_{k\varepsilon}}{\partial x} X_{k\varepsilon} \sigma_{k\varepsilon} \right) dW_t \right| \\ &\leq \left(\mathbf{E} \sup_t X_t^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbf{E} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \left| \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\frac{\partial H_t}{\partial x} X_t \sigma_t - \frac{\partial H_{k\varepsilon}}{\partial x} X_{k\varepsilon} \sigma_{k\varepsilon} \right) dW_t \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\ &\leq C \left(\mathbf{E} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \left| \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\frac{\partial H_t}{\partial x} X_t \sigma_t - \frac{\partial H_{k\varepsilon}}{\partial x} X_{k\varepsilon} \sigma_{k\varepsilon} \right) dW_t \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\ &\leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\frac{\partial H_t}{\partial x} X_t \sigma_t - \frac{\partial H_{k\varepsilon}}{\partial x} X_{k\varepsilon} \sigma_{k\varepsilon} \right) dW_t \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\frac{\partial H_t}{\partial x} X_t \sigma_t - \frac{\partial H_{k\varepsilon}}{\partial x} X_{k\varepsilon} \sigma_{k\varepsilon} \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

par (2.82), on sait que $e_2(\varepsilon)$ est au plus d'ordre $o(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})$.

Donc on a

$$\begin{aligned} C^\varepsilon &= \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \left| \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \frac{\partial H_{k\varepsilon}}{\partial x} X_{k\varepsilon} \sigma_{k\varepsilon} X_{k\varepsilon} dW_t \right| + o\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + O(1) \\ &= \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \left| \frac{\partial H_{k\varepsilon}}{\partial x} X_{k\varepsilon}^2 \sigma_{k\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} dW_t \right| + o\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \\ &= \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \left| \frac{\partial H_{k\varepsilon}}{\partial x} X_{k\varepsilon}^2 \sigma_{k\varepsilon} \right| |W_{(k+1)\varepsilon} - W_{k\varepsilon}| + o\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \\ &= \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\pi}} \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \left| \frac{\partial H_{k\varepsilon}}{\partial x} X_{k\varepsilon}^2 \sigma_{k\varepsilon} \right| + o\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\varepsilon\pi}} \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left| \frac{\partial H_{k\varepsilon}}{\partial x} X_{k\varepsilon}^2 \sigma_{k\varepsilon} \right| dt + o\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{2}{\varepsilon\pi}} \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left| \frac{\partial H_t}{\partial x} X_t^2 \sigma_t \right| dt - \sqrt{\frac{2}{\varepsilon\pi}} e_3(\varepsilon) + o\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\varepsilon\pi}} \mathbf{E} \int_0^T \left| \frac{\partial H_t}{\partial x} X_t^2 \sigma_t \right| dt - \sqrt{\frac{2}{\varepsilon\pi}} e_3(\varepsilon) + o\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)
\end{aligned} \tag{2.85}$$

avec

$$e_3(\varepsilon) = \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\left| \frac{\partial H_t}{\partial x} X_t^2 \sigma_t \right| - \left| \frac{\partial H_{k\varepsilon}}{\partial x} X_{k\varepsilon}^2 \sigma_{k\varepsilon} \right| \right) dt.$$

On peut évaluer $e_3(\varepsilon)$ par

$$\begin{aligned}
|e_3(\varepsilon)| &\leq \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left| \left| \frac{\partial H_t}{\partial x} X_t^2 \sigma_t \right| - \left| \frac{\partial H_{k\varepsilon}}{\partial x} X_{k\varepsilon}^2 \sigma_{k\varepsilon} \right| \right| dt \\
&\leq \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left| \frac{\partial H_t}{\partial x} X_t^2 \sigma_t - \frac{\partial H_{k\varepsilon}}{\partial x} X_{k\varepsilon}^2 \sigma_{k\varepsilon} \right| dt \\
&\leq \left(\mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\frac{\partial H_t}{\partial x} X_t^2 \sigma_t - \frac{\partial H_{k\varepsilon}}{\partial x} X_{k\varepsilon}^2 \sigma_{k\varepsilon} \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Or par (2.83), c'est un $o(1)$, donc $|e_3(\varepsilon)|$ est aussi un $o(1)$. Et par (2.85), on a que

$$C^\varepsilon = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon\pi}} \mathbf{E} \int_0^T \left| \frac{\partial H_t}{\partial x} X_t^2 \sigma_t \right| dt + o\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$$

d'où la démonstration. ■

Chapitre 3

Couverture Approchée Multi-dimensionnelle

Dans ce chapitre nous traitons le cas où il y a d actifs risqués. Nous montrons des résultats proches mais moins généraux que dans le chapitre 2. On prouve, tout d'abord, que si la fonction f est très régulière (essentiellement de classe C^2) la vitesse de convergence du risque résiduel quadratique de la couverture approchée et de la couverture optimale est la même et l'on obtient une formule pour expliciter cette vitesse. Dans le cas des puts et des calls, on obtient le résultat uniquement dans le cadre du modèle de Black et Scholes généralisé, c'est à dire dans le cas où la matrice de volatilité est constante. Nous étudions aussi le comportement asymptotique du risque résiduel dans le cas de la couverture approchée par un sous panier des actifs risqués. Enfin nous traitons en détail le cas de la dimension 2 où l'on peut obtenir des formules explicites relativement simples.

3.1 Modèle général

On reprend le modèle du chapitre 1. Rappelons que l'on note $X_t = \{X_t^i\}_{1 \leq i \leq d}$ les prix des actifs à l'instant t , et X_t^0 le prix de l'actif sans risque. On suppose de plus que ces processus sont solutions du système d'équations différentielles stochastiques :

$$\begin{cases} \frac{dX_t^0}{X_t^0} = rdt \\ \frac{dX_t^i}{X_t^i} = \mu_i(t, X_t)dt + \sum_{j=1}^d \sigma_{i,j}(t, X_t)dW_t^j, \quad i = 1..d, \end{cases} \quad (3.1)$$

avec pour tout i, j, m, n , $\sigma_{i,j}(t, x)$ qui est de classe $C^{1,\infty}$, et $x_m \frac{\partial \sigma_{i,j}}{\partial x_m}(t, x)$, $x_m x_n \frac{\partial^2 \sigma_{i,j}}{\partial x_m \partial x_n}(t, x)$ qui sont uniformément bornées.

On fait le changement de probabilité traditionnel pour obtenir sous une nouvelle probabilité $\tilde{\mathbf{P}}$:

$$\begin{cases} \frac{dX_t^0}{X_t^0} = rdt \\ \frac{dX_t^i}{X_t^i} = rdt + \sum_{j=1}^d \sigma_{i,j}(t, X_t) d\tilde{W}_t^j. \end{cases}$$

Les prix actualisés \tilde{X}_t^i sont alors des martingales sous $\tilde{\mathbf{P}}$, l'on va continuer à noter, par abus de notation \mathbf{P} . On suppose, de plus, que les options portent sur un actif contingent de la forme :

$$h = f(X_T)$$

où T est la date d'exercice de l'option, et f satisfait l'hypothèse :

(B1) f a les d dérivées partielles généralisées (au sens des distributions) d'ordre 1 dans $L_{loc}^p(\mathbf{R}^d)$ et à croissance polynômiale .

Rappelons que le prix de l'option européenne à l'instant t d'échéance T et l'actif contingent $f(X_T)$ est $F(t, X_t)$, avec :

$$F(t, x) = \tilde{\mathbf{E}}f(X_T^{t,x}).$$

On peut montrer, de plus, le résultat suivant :

Proposition 3.1.1 *Sous l'hypothèse (B1) , $F \in C^{1,\infty}([0, T[\times \mathbf{R}^{+*d})$, et satisfait l'équation aux dérivées partielles suivante :*

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) + AF(t, x) - rF(t, x) = 0. \quad (3.2)$$

De plus on a les estimations suivantes pour les dérivées. on a

Proposition 3.1.2 *Sous l'hypothèse (B1) , on a, pour tout i et pour tout j :*

$$\left| \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(t, x) \right| \leq \frac{C(1 + \|x\|^\alpha)}{x_i x_j (T - t)}.$$

Démonstration : On note $Y_t = \log X_t$. Alors on vérifie que les coefficients du générateur infinitésimal satisfont les conditions (A1) – (A3) du théorème 1.3.3. Donc, la solution fondamentale de Y_t sous $\tilde{\mathbf{P}}$ existe, et l'on peut écrire :

$$\begin{aligned} F(t, x) &= \tilde{\mathbf{E}}(f(X_T^{t,x})) \\ &= \tilde{\mathbf{E}}f(e^{Y_T^{t,\log x}}) \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} f(e^z) p(t, T; \log x, z) dz. \end{aligned}$$

En dérivant par rapport à x_i et x_j , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(t, x) &= \int_{\mathbf{R}^d} f(e^z) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} p(t, T; \log x, z) dz \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} f(e^z) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{x_i} \frac{\partial p}{\partial x_i}(t, T; \log x, z) \right) dz \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} f(e^z) \left(-\delta_{ij} \frac{1}{x_i x_j} \frac{\partial p}{\partial x_i}(t, T; \log x, z) + \frac{1}{x_i x_j} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j}(t, T; \log x, z) \right) dz. \end{aligned}$$

Puis, en utilisant les estimations des dérivées de la solution fondamentale contenu dans le théorème 1.3.3, et comme f est à croissance polynômiale, on a :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(t, x) \right| &\leq \\ &\leq \int_{\mathbf{R}^d} C(1 + e^{\alpha z}) \left(\frac{1}{x_i x_j} \left| \frac{\partial p}{\partial x_i}(t, T; \log x, z) \right| + \frac{1}{x_i x_j} \left| \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j}(t, T; \log x, z) \right| \right) dz \\ &\leq \int_{\mathbf{R}^d} C(1 + e^{\alpha z}) \left(\frac{1}{x_i x_j} \frac{e^{-c \frac{\|\log x - z\|^2}{T-t}}}{(T-t)^{\frac{d+1}{2}}} + \frac{1}{x_i x_j} \frac{e^{-c \frac{\|\log x - z\|^2}{T-t}}}{(T-t)^{\frac{d}{2}+1}} \right) dz \\ &\leq \frac{C(1 + \|x\|^\alpha)}{x_i x_j (T-t)}. \end{aligned}$$

■

On introduit ici l'espace \mathcal{M}^2 en dimension d .

Définition 3.1.3 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité. Soit $(W_t = (W_t^1, \dots, W_t^d), t \geq 0)$, un mouvement brownien p dimensionnel, sous la probabilité \mathbf{P} , par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$. Soit \mathbf{Q} une mesure de probabilité équivalente à \mathbf{P} . On appelle $\mathcal{M}^2(\mathbf{Q})$ l'ensemble des processus d'Ito $(H_t, 0 \leq t \leq T)$ à valeur dans \mathbf{R}^d , $\{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ adapté, tel que :

$$dH_t = a_t dt + \sum_{i=1}^d b_t^i dW_t^i,$$

et tel que, pour tout $p \geq 1$ on ait :

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left(\int_0^T (a_t^2 + \sum_i (b_t^i)^2) dt \right)^p < \infty.$$

Remarque 3.1.4 De façon similaire au chapitre 2, notons que si \mathbf{P}_1 et \mathbf{P}_2 sont deux probabilités équivalentes telles que $\frac{d\mathbf{P}_1}{d\mathbf{P}_2} \in L^p(\mathbf{P}_2)$ et $\frac{d\mathbf{P}_2}{d\mathbf{P}_1} \in L^p(\mathbf{P}_1)$, pour tout $p > 1$, alors $\mathcal{M}^2(\mathbf{P}_1)$ et $\mathcal{M}^2(\mathbf{P}_2)$ coïncident.

On peut alors prouver, comme dans le chapitre 2 le résultat suivant.

Proposition 3.1.5 *Pour tout processus H dans $\mathcal{M}^2(\mathbf{P})$ de la forme :*

$$dH_t = a_t dt + \sum_{i=1}^d b_t^i dW_t^i,$$

on a :

$$\mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t a_s ds \right)^2 dt \sim O(\varepsilon^2),$$

et :

$$\mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left(\int_{k\varepsilon}^t a_s ds \right) \left(\int_{k\varepsilon}^t \sum_{i=1}^d b_s^i dW_s^i \right) dt \sim O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}).$$

Soit R_ε est le risque résiduel quadratique de la couverture approchée élémentaire , alors on a une proposition qui permettra d'estimer l'ordre de convergence de R_ε vers 0.

Proposition 3.1.6 *S'il existe $\beta > 0$, tel que, pour tout $i, j = 1..d$, :*

$$\mathbf{E} \left(\int_0^T \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(t, X_t) \right)^2 dt \right)^{1+\beta} < \infty, \quad (3.3)$$

alors on a :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{R_\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \left(\int_0^T e^{-2rt} \text{trace}((\sigma_t^* I_{X_t} J_t^F I_{X_t} \sigma_t)^2) dt \right), \quad (3.4)$$

avec :

$$J_t^F = \left(\frac{\partial^2 F_t}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1..d},$$

et, si $x = (x_1, \dots, x_d)$ est un point de \mathbf{R}^d :

$$I_x = \begin{pmatrix} x_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & x_d \end{pmatrix}.$$

Remarque 3.1.7 Remarquons que (3.4) peut s'écrire aussi sous la forme :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{R_\varepsilon}{\varepsilon} &= \frac{1}{2} \mathbf{E} \left(\int_0^T e^{-2rt} \text{tr}((\sigma_t \sigma_t^* I_{X_t} J_t^F I_{X_t})^2) dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{E} \left(\int_0^T \sum_{ijmn} e^{-2rt} a_{ij} a_{mn} X_t^i X_t^j X_t^m X_t^n \frac{\partial^2 F_t}{\partial x_j \partial x_m} \frac{\partial^2 F_t}{\partial x_n \partial x_i} dt \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Pour montrer cette proposition, on écrit la valeur actualisé du portefeuille de couverture sous la forme :

$$\tilde{V}_T = V_0 + \int_0^T H_t^* d\tilde{X}_t$$

où H_t^* est le transposé de H_t . De plus, le risque résiduel s'écrit alors :

$$\begin{aligned} R_\varepsilon &= \mathbf{E} \left(\tilde{V}_T - \tilde{V}_T^\varepsilon \right)^2 \\ &= \mathbf{E} \left(\int_0^T (H_t - H_t^\varepsilon)^* d\tilde{X}_t \right)^2 \\ &= \mathbf{E} \left(\int_0^T (H_t - H_t^\varepsilon)^* I_{\tilde{X}_t} \sigma_t dW_t \right)^2 \\ &= \mathbf{E} \left(\int_0^T \|\sigma_t^* I_{\tilde{X}_t} (H_t - H_t^\varepsilon)\|^2 dt \right) \\ &= \mathbf{E} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \|\sigma_t^* I_{\tilde{X}_t} (H_t - H_{k\varepsilon})\|^2 dt \right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

On utilise ensuite la formule d'Ito pour H_t , on a sous $\tilde{\mathbf{P}}$:

$$dH_t = J_t^F I_{X_t} \sigma_t dW_t + \left(\frac{\partial H}{\partial t} + I_A H \right) dt. \quad (3.7)$$

Or, en utilisant (3.2) on a :

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) + r \sum_{i=1}^d x_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d a_{ij} x_i x_j \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(t, x) = 0.$$

Puisque F est dans $C^{1,\infty}([0, T] \times \mathbf{R}^d)$, en dérivant par rapport à x_k , on obtient :

$$\frac{\partial H^k}{\partial t} + r \sum_{i=1}^d x_i \frac{\partial H^k}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d a_{ij} x_i x_j \frac{\partial^2 H^k}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_k} (a_{ij} x_i x_j) \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = 0.$$

On en déduit que si l'on note :

$$d_k = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_k} (a_{ij} x_i x_j) \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}.$$

on a :

$$\frac{\partial H^k}{\partial t} + A H^k + d_k F = 0.$$

On en déduit, en écrivant :

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_d \end{pmatrix}$$

que :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + I_A H + \mathcal{D}F = 0.$$

Donc, en utilisant l'équation (3.7), on obtient :

$$dH_t = J_t^F I_{X_t} \sigma_t dW_t - \mathcal{D}F dt.$$

Alors, par l'équation (3.6) :

$$R_\varepsilon = \mathbf{E} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left\| \sigma_t^* I_{\tilde{X}_t} \left(\int_{k\varepsilon}^t J_s^F I_{X_s} \sigma_s dW_s - \mathcal{D}F ds \right) \right\|^2 dt \right). \quad (3.8)$$

Avec la même méthode que dans la section 2.2.2, on peut montrer que dans (3.8) la partie drift de dH_t , c'est à dire $-\mathcal{D}H ds$, est asymptotiquement négligeable devant la partie martingale, et, que donc, l'on a le lemme suivant.

Lemme 3.1.8

$$R_\varepsilon = \mathbf{E} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left\| \sigma_t^* I_{\tilde{X}_t} \int_{k\varepsilon}^t J_s^F I_{X_s} \sigma_s dW_s \right\|^2 dt \right) + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}).$$

De plus, on a l'estimation suivante qui est plus facile à manipuler :

Lemme 3.1.9

$$R_\varepsilon = \mathbf{E} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^t \left\| \sigma_s^* I_{\tilde{X}_s} J_s^F I_{X_s} \sigma_s \right\|^2 ds dt \right) + o(\varepsilon), \quad (3.9)$$

où le norme de matrice est racine de la somme des carrés de tous les éléments de la matrice.

Démonstration : On commence par montrer que :

$$\mathbf{E} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left\| \sigma_{k\varepsilon}^* I_{\tilde{X}_{k\varepsilon}} \int_{k\varepsilon}^t J_s^F I_{X_s} \sigma_s dW_s \right\|^2 dt \right) + o(\varepsilon).$$

Pour montrer cela, il suffit de remarquer que :

$$\mathbf{E} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} e^{-2rt} \left\| (\sigma_t^* I_{\tilde{X}_t} - \sigma_{k\varepsilon}^* I_{X_{k\varepsilon}}) \int_{k\varepsilon}^t J_s^F I_{X_s} \sigma_s dW_s \right\|^2 dt \right) \sim o(\varepsilon),$$

c'étant facile à déduire du fait que :

$$\sup_k \mathbf{E} \left(\sup_{k\varepsilon \leq t \leq (k+1)\varepsilon} \|X_t - X_{k\varepsilon}\|^p \sim \varepsilon^{\frac{p}{2}} \right),$$

que l'on obtient de façon analogue au lemme 2.2.15.

Ensuite on remarque que, par isométrie de l'intégration stochastique :

$$R_\varepsilon = \mathbf{E} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^t \|\sigma_{k\varepsilon}^* I_{\tilde{X}_{k\varepsilon}} J_s^F I_{X_s} \sigma_s\|^2 ds dt \right) + o(\varepsilon).$$

Mais on montre alors que l'on peut remplacer $\sigma_{k\varepsilon}^* I_{\tilde{X}_{k\varepsilon}}$ par $\sigma_s^* I_{\tilde{X}_s}$, et on en déduit le lemme. ■

Continuons la démonstration de proposition 3.1.5. Par (3.9) et lemme 2.2.20, on a

$$R_\varepsilon = \frac{1}{2} \mathbf{E} \left(\int_0^T e^{-2rt} \|\sigma_t^* I_{X_t} J_t^F I_{X_t} \sigma_t\|^2 dt \right) + o(\varepsilon).$$

et remarquons que si A est une matrice de carrées, on a $\|A\|$ est égale à la trace de matrice AA^* .

Comme $\sigma_t^* I_{X_t} J_t^F I_{X_t} \sigma_t$ est symétrique, on a

$$\|\sigma_t^* I_{X_t} J_t^F I_{X_t} \sigma_t\| = \text{tr} \left((\sigma_t^* I_{X_t} J_t^F I_{X_t} \sigma_t)^2 \right),$$

d'où la proposition 3.1.6.

Donc tout ce qu'on a à faire, c'est de vérifier la condition (3.3). Dans chapitre 2, on les options qui vérifie l'hypothèse **(H1)** vérifie cette condition, grâce au fait que la couverture $H = \frac{\partial F}{\partial x}$ est une martingale sous une probabilité fortement équivalente à la probabilité initiale et le lemme 2.2.3.

Maintenant dans le cadre multi-dimensionnel, les couvertures H^i ne sont plus des martingales sous certaines probabilité, on ne peut vérifier si les H^i sont dans $\mathcal{M}^2(\mathbf{P})$ directement. Mais dans deux cas c'est possible, c'est le cas où f est régulière et le cas où la volatilité est déterministe.

3.2 Le cas f est régulière

Dans cette section, on ajoute l'hypothèse suivante :

(B2) f a toutes les dérivées généralisées d'ordre 2 localement intégrables et à croissance polynômiale.

Le prix de l'option à l'instant t est $F(t, X_t)$, avec :

$$F(t, x) = e^{-(T-t)} \tilde{\mathbf{E}} f(X_T^{t,x}).$$

alors la quantité de i ème actif qu'il faut tenir à l'instant t pour répliquer l'option est

$$H_t^i = H^i(t, X_t) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(t, X_t).$$

f a toutes ses dérivées généralisées d'ordre 1 localement intégrable dans $L^p(\mathbf{R}^d)$ et à croissance polynômiale dans \mathbf{R}^d , ceci implique que $H^i(t, x)$ peut s'écrire sous le forme

$$\begin{aligned} H^i(t, x) &= \frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(e^{-r(T-t)} \tilde{\mathbf{E}} f(X_T^{t,x}) \right) \\ &= e^{-r(T-t)} \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{\mathbf{E}} f(X_T^{t,x}) \end{aligned}$$

Par analogie avec la proposition 2.2.24 on peut intervertir la dérivation et l'espérance. Donc on a

$$\begin{aligned} H^i(t, x) &= e^{-r(T-t)} \tilde{\mathbf{E}} \frac{\partial}{\partial x_i} f(X_T^{t,x}) \\ &= e^{-r(T-t)} \tilde{\mathbf{E}} \sum_{m=1}^d f'_m(X_T^{t,x}) \frac{\partial X_T^{m,t,x}}{\partial x_i} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(t, x) &= \frac{\partial}{\partial x_j} H^i(t, x) \\ &= e^{-r(T-t)} \tilde{\mathbf{E}} \sum_{m,n=1}^d f''_{m,n}(X_T^{t,x}) \frac{\partial X_T^{m,t,x}}{\partial x_i} \frac{\partial X_T^{n,t,x}}{\partial x_j} \\ &\quad + e^{-r(T-t)} \tilde{\mathbf{E}} \sum_{m=1}^d f'_m(X_T^{t,x}) \frac{\partial^2 X_T^{m,t,x}}{\partial x_i \partial x_j} \end{aligned} \tag{3.10}$$

Pour vérifier la condition (3.3), on a besoin des deux lemmes suivants :

Lemme 3.2.1 *Si Y_t est un processus de diffusion satisfaisant*

$$dY_t = \sigma(t, X_t) dW_t + \mu(t, X_t) dt$$

avec σ et μ dans $C^{1,\infty}$, et toutes les dérivées par rapport à x bornées, alors $\forall i, j, m$, $\sup_t \mathbf{E} \left| \frac{\partial X_t^{m,x}}{\partial x_i} \right|^p$ et $\sup_t \mathbf{E} \left| \frac{\partial^2 X_t^{m,x}}{\partial x_i \partial x_j} \right|^p$ sont uniformément bornés en x , pour tout $p > 0$.

Démonstration : On montre d'abord pour $p = 2$. Notons $Y_t^i = \frac{\partial X_t^{m,x}}{\partial x_i}$ et $Y_t = (Y_t^1, \dots, Y_t^d)$, alors Y_t satisfait

$$Y_t = I + \int_0^t \sum_{k=1}^d (\sigma'(s, X_s))_k Y_s dW_s^k + \mu'(s, X_s) Y_s ds$$

avec

$$(\sigma'(s, X_s))_k = \left(\frac{\partial \sigma_{i,k}(s, X_s)}{\partial x_j} \right)_{i,j}, \quad \mu'(s, X_s) = \left(\frac{\partial \mu_i(s, X_s)}{\partial x_j} \right)_{i,j},$$

où tous les éléments de $(\sigma'(s, X_s))_k$ et $\mu'(s, X_s)$ sont uniformément bornés.

Donc

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \|Y_t\|^2 &\leq C_1 + C_2 \sum_{k=1}^d \mathbf{E} \int_0^t \|(\sigma(s, X_s))_k Y_s\|^2 ds + \mathbf{E} \int_0^t \|(\mu'(s, X_s)) Y_s\|^2 ds \\ &\leq C_1 + C_3 \int_0^t \mathbf{E} \|Y_s\|^2 ds \end{aligned}$$

Par inégalité de Gronwall, $\mathbf{E} \|Y_t\|^2$ est bornée par $C_1 e^{C_3 T}$, $\forall t$.

Par le difféomorphisme de X_t^x , si on note

$$Z_t^{i,j} = \left(\frac{\partial^2 X_t^{m,x}}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{m=1..d},$$

On a

$$\begin{aligned} Z_t^{i,j} &= \sum_{m,k} \int_0^t (\sigma''_{m,k}(s, X_s) Y_s^i Y_{s,j}^m + (\sigma'(s, X_s))_k Z_s^{i,j}) dW_s^k \\ &\quad + \int_0^t (\mu''(s, X_s) Y_s^i Y_{s,j}^l + (\sum_l \mu'_l(s, X_s)) Z_s^{i,j}) ds, \end{aligned}$$

avec

$$\sigma''_{m,k}(s, X_s) = \left(\frac{\partial^2 \sigma_{i,k}(s, X_s)}{\partial x_j \partial x_m} \right)_{i,j}, \quad \mu'_l(s, X_s) = \left(\frac{\partial^2 \mu_i(s, X_s)}{\partial x_j \partial x_l} \right)_{i,j},$$

et les éléments de $\sigma''_{m,k}(s, X_s)$ et $\mu'_l(s, X_s)$ sont bornés aussi. Donc même raisonnement

fait que $\sup_t \mathbf{E} \left| \frac{\partial^2 X_t^{m,x}}{\partial x_i \partial x_j} \right|^2$ est uniformément bornés en x .

Même façon on peut montrer le lemme pour $p > 2$. Le cas $0 < p < 2$ est une conséquence d'inégalité de Cauchy-Schwartz. ■

Lemme 3.2.2 *pour tout $i, j, m = 1..d$, on a $\frac{\partial X_T^{m,t,x}}{\partial x_i}$ et $\frac{\partial^2 X_T^{m,t,x}}{\partial x_i \partial x_j}$ sont dans $L^p(\Omega)$, $\forall p > 0$, de plus,*

$$x \rightarrow \sup_{t \in [0, T]} \mathbf{E} \left| \frac{\partial X_T^{m,t,x}}{\partial x_i} \right|^p$$

$$x \rightarrow \sup_{t \in [0, T]} \mathbf{E} \left| \frac{\partial^2 X_T^{m, t, x}}{\partial x_i \partial x_j} \right|^p$$

sont des fonctions à croissance polynômiale en x et $x^{-1} = (x_1^{-1}, \dots, x_d^{-1})$.

Démonstration : Sous \mathbf{P} , X_t satisfait

$$dX_t = \sigma(t, X_t)dW_t + rdt$$

Notons $Y_t = \log X_t$. Alors on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_t^{m, x}}{\partial x_i} &= \frac{\partial e^{Y_t^{m, \log x}}}{\partial x_i} \\ &= e^{Y_t^{m, \log x}} \frac{\partial Y_t^{m, \log x}}{\partial x_i} \\ &= X_t^{m, x} \frac{\partial Y_t^{m, \log x}}{\partial x_i} \\ &= x_i^{-1} X_t^{m, x} \frac{\partial Y_t^{m, \log x}}{\partial y_i} \end{aligned} \quad (3.11)$$

et

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 X_T^{m, t, x}}{\partial x_i \partial x_j} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(x_i^{-1} X_t^{m, x} \frac{\partial Y_t^{m, \log x}}{\partial y_i} \right) \\ &= x_i^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} X_t^{m, x} \frac{\partial Y_t^{m, \log x}}{\partial y_i} + X_t^{m, x} \frac{\partial^2 Y_t^{m, \log x}}{\partial y_i \partial y_j} + \delta_{i, j} \frac{\partial Y_t^{m, \log x}}{\partial y_i} \right) \\ &= x_i^{-1} x_j^{-1} X_t^{m, x} \left(\frac{\partial Y_t^{m, \log x}}{\partial y_i} \frac{\partial Y_t^{m, \log x}}{\partial y_j} + \frac{\partial^2 Y_t^{m, \log x}}{\partial y_i \partial y_j} - \delta_{i, j} \frac{\partial Y_t^{m, \log x}}{\partial y_i} \right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Donc on a par (3.11) l'évaluation

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left| \frac{\partial X_t^{m, x}}{\partial x_i} \right|^p &\leq x_i^{-p} \mathbf{E} \left| X_t^{m, x} \frac{\partial Y_t^{m, \log x}}{\partial y_i} \right|^p \\ &\leq C \left(\frac{x_m}{x_i} \right)^p \end{aligned}$$

De même par (3.12) on a

$$\mathbf{E} \left| \frac{\partial^2 X_t^{m, x}}{\partial x_i \partial x_j} \right|^p \leq C \left(\frac{x_m}{x_i x_j} \right)^p$$

D'où le lemme. ■

Alors, par hypothèse **(B2)** et (3.10), on a

Proposition 3.2.3 $x \rightarrow \sup_{t \in [0, T]} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(t, x)$ est à croissance polynômiale.

Donc on a qu'il existe $\alpha > 0$, pour tout $\beta > 0$,

$$\mathbf{E} \left(\int_0^T \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(t, X_t) \right)^2 dt \right)^{1+\beta} \leq C \mathbf{E} \left(\int_0^T |X_t|^\alpha dt \right)^{1+\beta} < \infty$$

Donc la condition (3.3) est vérifiée.

3.3 Modèle avec volatilité déterministe

Ici, on suppose que la matrice de volatilité σ dans l'équation (3.1) est déterministe, c'est à dire σ ne dépend que de t et non de x , et dérivable par rapport à t et uniformément borné et $\sigma(t)$ est uniformément elliptique, on a :

$$\begin{cases} \frac{dX_t^0}{X_t^0} = r dt \\ \frac{dX_t^i}{X_t^i} = r dt + \sum_{j=1}^d \sigma_{i,j}(t) d\tilde{W}_t \end{cases} \quad (3.13)$$

On suppose, toujours, que les options portent sur un actif contingent

$$h = f(X_T),$$

où T est la date d'exercice de l'option, f satisfait **(B1)**, c'est à dire, f a toutes ses dérivées généralisées d'ordre 1 localement intégrable dans $L^p(\mathbf{R}^d)$ et à croissance polynômiale.

Lemme 3.3.1

$$\frac{\partial X_t^{i,x}}{\partial x_j} = \delta_{i,j} e^{\int_0^t \sum_{j=1}^d \sigma_{i,j}(s) dW_s^j - \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{j=1}^d \sigma_{i,j}^2(s) ds + rt}$$

Démonstration : σ étant déterministe, on voit dans l'équation 3.13 que pour $i \neq j$, il n'y pas interaction entre X^i et X^j , le calcul de $\frac{\partial X_t^{i,x}}{\partial x_i}$ revient à la même méthode que sous cas de unidimensionnel, en effet, on a

$$X_t^i = x_i e^{\int_0^t \sum_{j=1}^d \sigma_{i,j}(s) dW_s^j - \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{j=1}^d \sigma_{i,j}^2(s) ds + rt}$$

donc

$$\frac{\partial X_t^{i,x}}{\partial x_j} = \delta_{i,j} e^{\int_0^t \sum_{j=1}^d \sigma_{i,j}(s) dW_s^j - \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{j=1}^d \sigma_{i,j}^2(s) ds + rt}$$

■

Donc on a

$$\begin{aligned}
H^i(t, x) &= e^{-r(T-t)} \tilde{\mathbf{E}} \frac{\partial}{\partial x_i} f(X_T^{t,x}) \\
&= e^{-r(T-t)} \tilde{\mathbf{E}} \sum_{j=1}^d f'_j(X_T^{t,x}) \frac{\partial X_T^{j,t,x}}{\partial x_i} \\
&= e^{-r(T-t)} \tilde{\mathbf{E}} \sum_{j=1}^d f'_j(X_T^{t,x}) \delta_{j,i} e^{\int_t^T \sum_{k=1}^d \sigma_{j,k}(s) dW_s^k - \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{k=1}^d \sigma_{j,k}^2(s) ds + r(T-t)} \\
&= \tilde{\mathbf{E}} f'_i(X_T^{t,x}) e^{\int_t^T \sum_{k=1}^d \sigma_{i,k}(s) dW_s^k - \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{k=1}^d \sigma_{i,k}^2(s) ds}.
\end{aligned}$$

Avec théorème de Girsanov, on peut faire un changement de probabilité. Sous la probabilité \mathbf{P}_i telle que

$$\frac{d\mathbf{P}_i}{d\tilde{\mathbf{P}}} = e^{\int_0^T \sum_{k=1}^d \sigma_{i,k}(s) dW_s^k - \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{k=1}^d \sigma_{i,k}^2(s) ds},$$

on a

$$H^i(t, x) = \mathbf{E}_i f'_i(X_T^{t,x}).$$

Alors $H_t^i = H_i(t, X_t)$ est \mathbf{P}_i -martingale pour tout i , sous \mathbf{P}_i on a

$$\begin{aligned}
dX_t &= rX_t dt + I_{X_t} \sigma_t dW_t \\
&= {}_t dt + I_{X_t} \sigma_t (dW_t^{(i)} + (\sigma_t^{(i)})^* dt) \\
&= (rX_t + I_{X_t} \sigma_t (\sigma_t^{(i)})^*) dt + I_{X_t} \sigma_t dW_t^{(i)}
\end{aligned}$$

avec $W_t^{(i)}$ martingale sous \mathbf{P}_i et

$$\sigma_t^{(i)} = (\sigma_{i,1}, \dots, \sigma_{i,d})$$

$H^i(t, x)$ satisfait l'équation aux dérivées partielles suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A^i u = 0. \quad (3.14)$$

avec A^i générateur infinitésimal de X sous \mathbf{P}_i , qui s'écrit sous la forme

$$A^i u = Au + \sum_{j=1}^d b_j^{(i)} \frac{\partial u}{\partial x_j} \quad (3.15)$$

où $b^{(i)} = I_{X_t} \sigma_t (\sigma_t^{(i)})^*$. et A est le générateur infinitésimal sous $\tilde{\mathbf{P}}$ du processus de diffusion X , avec

$$Au = \sum_{i=1}^d r x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d x_i x_j a_{ij}(t, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j},$$

où $(a_{ij}) = \sigma\sigma^*$.

En écrivant

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A^1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & A^d \end{pmatrix}.$$

$$B^i = \sum_{j=1}^d b_j^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} B^1 & & \\ & \ddots & \\ & & B^d \end{pmatrix},$$

on a par (3.15)

$$\mathcal{A} = I_A + \mathcal{B}. \quad (3.16)$$

En plus, par (3.14), $H(t, x)$ satisfait le système d'équation aux dérivées partielles suivant :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \mathcal{A}H = 0 \quad (3.17)$$

et comme f'_i est à croissance polynômiale, on a que pour tout $p > 1$, H_T^i est dans $L^p(\mathbf{P}_i)$.

Évidemment, $\tilde{\mathbf{P}}_i$ et $\tilde{\mathbf{P}}$ sont fortement équivalentes. Sous $\tilde{\mathbf{P}}_i$, X_t est une diffusion, et $\{H_t^i\}_{i=1..d}$ sont dans $C^{1,\infty}([0.T] \times \mathbf{R}^d)$, on peut utiliser la formule d'Ito pour chaque H^i . on a le résultat suivant similaire que la proposition 2.2.31 :

Lemme 3.3.2 *Pour tout $i, j = 1..d$, et tout $\beta > 0$ on a :*

$$\mathbf{E} \left(\int_0^T \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(t, X_t) \right)^2 dt \right)^{1+\beta} < \infty$$

Démonstration : Comme $\forall i, \mathbf{P}_i \simeq \tilde{\mathbf{P}}$, alors le lemme est équivalent à ce que pour chaque i fixé, pour tout $j = 1..d$, $\beta > 0$, on a

$$\mathbf{E}_i \left(\int_0^T \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(t, X_t) \right)^2 dt \right)^{1+\beta} < \infty,$$

i.e.

$$\mathbf{E}_i \left(\int_0^T \sum_{j=1}^d \left| \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(t, X_t) \right|^2 dt \right)^{1+\beta} < \infty. \quad (3.18)$$

Comme la \mathbf{P}_i -martingale H_i est dans tout L^p , $p > 1$, alors pour tout $\beta > 0$,

$$\mathbf{E}_i \left(\left(\int_0^T d \langle H^i \rangle_t \right)^{1+\beta} \right) \leq \mathbf{E}_i \left(\sup_t (H_t^i - H_0^i)^{1+\beta} \right) < \infty.$$

Par formule d'Ito, on a

$$\begin{aligned} dH_t^i &= \sum_{j=1}^d \frac{\partial H_t^i}{\partial x_j} X_t^j \left(\sum_{k=1}^d \sigma_{jk} dW_t^k \right) \\ &= \sum_{j,k=1}^d \sigma_{jk} \frac{\partial H_t^i}{\partial x_j} X_t^j dW_t^k \end{aligned}$$

si on note

$$C_t^i = \left(\frac{\partial H_t^i}{\partial x_j} X_t^j \right)_{j=1..d},$$

alors on réécrit

$$dH_t^i = (C_t^i)^* \sigma_t dW_t$$

donc

$$\int_0^T d \langle H^i \rangle_t = \int_0^T \|\sigma_t^* C_t^i\|^2 dt,$$

et par l'ellipticité de σ , il existe une constante C , telle que

$$\int_0^T d \langle H^i \rangle_t \geq C \int_0^T \|C_t^i\|^2 dt,$$

donc

$$\mathbf{E}_i \left(\int_0^T \|C_t^i\|^2 dt \right)^{1+\beta} \leq \mathbf{E}_i \left(\int_0^T d \langle H^i \rangle_t \right)^{1+\beta} < \infty,$$

c'est à dire,

$$\mathbf{E}_i \left(\int_0^T \left| \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} (t, X_t) X_t^j \right|^2 dt \right)^{1+\beta} < \infty,$$

ce qui est équivalente à (3.18). D'où la démonstration. ■

Alors on a notre résultat sur la convergence du risque résiduel quadratique sous le modèle avec la volatilité déterministe :

Corollaire 3.3.3 *Sous le modèle (3.1), le risque résiduel de la couverture approchée élémentaire converge vers 0 à la vitesse ε , et (3.3) est vérifiée.*

Démonstration : Par lemme 3.3.2, la condition de la proposition 3.1.5 est vérifiée, donc on a (3.3). ■

- Comme dans le cas de la dimension 1, le call et le put européen sur indice de la forme $h = (\sum_i \lambda_i X_T^i - K)_+$ et $h = (K - \sum_i \lambda_i X_T^i)$ satisfont la condition de la proposition 3.1.5, (3.3) est vérifiée.

3.4 Couverture avec une partie des actifs sous-jacents

Dans Lamberton-Lapeyre [LL92b], on a traité le cas où dans un marché de d actifs sous-jacents, on couvre l'option européenne avec m ($m < d$) actifs sous-jacents au lieu d'utiliser tous d actifs. Avec cette couverture, il y a un risque résiduel intrinsèque. Nous allons discrétiser cette couverture, et étudier la couverture approchée vis-à-vis à cette couverture.

On suppose toujours que pour l'actif contingent l'hypothèse **(B1)** est vérifiée, et la valeur actualisée de l'option s'écrit

$$\tilde{V}_t = V_0 + \int_0^t H_u^* I_{\tilde{X}_u} \sigma_u dW_u.$$

On note M_t les actifs que l'on utilise à faire la couverture, et \tilde{M}_t leur valeurs actualisées, supposons

$$d\tilde{M}_t = G_t dW_t = P d\tilde{X}_t = P I_{\tilde{X}_t} \sigma_t dW_t, \quad (3.19)$$

où P est une matrice de $m \times d$ de rang m , et d'éléments 0 ou 1, le nombre de 1 est m .

Si on note la stratégie de couverture avec M_t est (K^0, K^1, \dots, K^m) , alors sa valeur actualisée est

$$\tilde{V}_t^K = V_0^K + \int_0^t K_u^* d\tilde{M}_u = V_0^K + \int_0^t K_u^* G_u dW_u.$$

Prenons $V_0^K = V_0$, on a le risque résiduel intrinsèque est

$$\begin{aligned} R &= \mathbf{E}(\tilde{V}_T - \tilde{V}_T^K)^2 \\ &= \mathbf{E}\left(\int_0^T (H_u^* I_{\tilde{X}_u} \sigma_u - K_u^* G_u) dW_u\right)^2 \\ &= \mathbf{E} \int_0^T \|H_u^* I_{\tilde{X}_u} \sigma_u - K_u^* G_u\|^2 du \\ &= \mathbf{E} \int_0^T \|\sigma_u^* I_{\tilde{X}_u} H_u - G_u^* K_u\|^2 du \end{aligned}$$

Pour minimiser ce risque, on peut le résoudre comme un problème de régression multiple linéaire, et le minimisant est

$$\overline{K}_t = (G_t G_t^*)^{-1} G_t \sigma_t^* I_{\tilde{X}_t} H_t. \quad (3.20)$$

Le risque résiduel intrinsèque est alors

$$R = \mathbf{E} \int_0^T \|\sigma_u^* I_{\tilde{X}_u} H_u - G_u^* \overline{K}_u\|^2 du$$

qui est causé par le fait qu'on restreint sur le choix des actions utilisées pour la couverture.

Maintenant on utilise la couverture approchée à temps fixe $\overline{K}_u^\varepsilon$ pour remplacer \overline{K}_u , et le risque résiduel est

$$\begin{aligned}\overline{R}_\varepsilon &= \mathbf{E} \int_0^T \|\sigma_u^* I_{\tilde{X}_u} H_u - G_u^* \overline{K}_u^\varepsilon\|^2 du \\ &= \mathbf{E} \int_0^T \|(\sigma_u^* I_{\tilde{X}_u} H_u - G_u^* \overline{K}_u) + (G_u^* \overline{K}_u - G_u^* \overline{K}_u^\varepsilon)\|^2 du,\end{aligned}$$

alors on a par l'inégalité de triangle,

$$\left| \sqrt{\overline{R}_\varepsilon} - \sqrt{\mathbf{E} \int_0^T \|\sigma_u^* I_{\tilde{X}_u} H_u - G_u^* \overline{K}_u\|^2 du} \right| \leq \sqrt{\mathbf{E} \int_0^T \|G_u^* \overline{K}_u - G_u^* \overline{K}_u^\varepsilon\|^2 du}$$

i.e.

$$|\sqrt{\overline{R}_\varepsilon} - \sqrt{\overline{R}}| \leq \sqrt{\mathbf{E} \int_0^T \|G_u^* \overline{K}_u - G_u^* \overline{K}_u^\varepsilon\|^2 du} \quad (3.21)$$

On vérifie que pour $\overline{K}_t = \overline{K}(t, X_t)$, on a

Lemme 3.4.1 $\forall i, \overline{K}_t^i$ est dans $\mathcal{M}^2(\mathbf{P})$.

Démonstration : \overline{K}_u est exprimée par (3.20), et on voit que chaque élément de la matrice $(G_t G_t^*)^{-1} G_t \sigma_t^* I_{\tilde{X}_t}$ est dans $\mathcal{N}^2(\mathbf{P})$, alors par lemme 2.2.7, on a que $\forall i, \overline{K}_t^i$ est dans $\mathcal{M}^2(\mathbf{P})$. ■

Donc la condition (3.3) est vérifiée, et par la proposition 3.1.5 on a

Proposition 3.4.2

$$|\sqrt{\overline{R}_\varepsilon} - \sqrt{\overline{R}}| \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \mathbf{E} \left(\int_0^T e^{-2rt} \|\sigma_t^* I_{X_t}^* P^* J_t^{\overline{K}} I_{X_t} \sigma_t\|_2^2 dt \right) \right)^{\frac{1}{2}} + o(\varepsilon^{\frac{1}{2}}), \quad (3.22)$$

avec $J_t^{\overline{K}}$ la matrice jacobienne de \overline{K} .

Démonstration : Par (3.21), il n'y a qu'à regarder la vitesse de convergence de $\mathbf{E} \int_0^T \|G_u^* \overline{K}_u - G_u^* \overline{K}_u^\varepsilon\|^2 du$. Or comme on a $\forall i, \overline{K}_t^i$ est dans $\mathcal{M}^2(\mathbf{P})$, par même raisonnement que dans proposition 3.1.6, on a bien

$$\begin{aligned}\mathbf{E} \int_0^T \|G_u^* \overline{K}_u - G_u^* \overline{K}_u^\varepsilon\|^2 du &= \frac{\varepsilon}{2} \mathbf{E} \left(\int_0^T \|G_t^* J_t^{\overline{K}} I_{X_t} \sigma_t\|_2^2 dt \right) + o(\varepsilon) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \mathbf{E} \left(\int_0^T e^{-2rt} \|\sigma_t^* I_{X_t}^* P^* J_t^{\overline{K}} I_{X_t} \sigma_t\|_2^2 dt \right) + o(\varepsilon),\end{aligned}$$

d'où la proposition. ■

3.5 Exemple

Voici un exemple pour élucider l'application du corollaire 3.3.3 et la proposition 3.4.2.

On suppose que dans le marché, il y a deux actifs sous-jacents, et on utilise que la première pour faire la couverture approchée d'une option européenne. Les deux actifs sous-jacents sont décrits par équation différentielle stochastique suivantes :

$$\begin{cases} \frac{dX_t^1}{X_t^1} = \sigma_{11}dW_t^1 + \sigma_{12}dW_t^2 \\ \frac{dX_t^2}{X_t^2} = \sigma_{21}dW_t^1 + \sigma_{22}dW_t^2 \end{cases},$$

et l'actif contingent est de la forme $h = (X_T^1 - SX_T^2)_+$. D'abord on va regarder la vitesse de convergence du risque résiduel de la couverture approchée en utilisant tous les deux actions risquées, en appliquant le corollaire 3.3.3. Ensuite on utilise que la première action pour faire une couverture approchées à temps fixe, ici s'applique la proposition 3.4.2.

La valeur de l'option à l'instant t est alors

$$\begin{aligned} F(t, X_t) &= \mathbf{E}((X_T^1 - SX_T^2)_+ | \mathcal{F}_t) \\ &= \mathbf{E}(X_T^2 (\frac{X_T^1}{X_T^2} - S)_+ | \mathcal{F}_t) \\ &= \mathbf{E}(X_t^2 e^{\sigma_{21}(W_T^1 - W_t^1) + \sigma_{22}(W_T^2 - W_t^2) - \frac{1}{2}(\sigma_{21}^2 + \sigma_{22}^2)(T-t)} (\frac{X_T^1}{X_T^2} - S)_+ | \mathcal{F}_t) \\ &= X_t^2 \tilde{\mathbf{E}}((\frac{X_T^1}{X_T^2} - S)_+ | \mathcal{F}_t) \end{aligned}$$

avec

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{P}}}{\partial \mathbf{P}} = e^{\sigma_{21}W_T^1 + \sigma_{22}W_T^2 - \frac{1}{2}T(\sigma_{21}^2 + \sigma_{22}^2)},$$

et avec le mouvement Brownien sous $\tilde{\mathbf{P}}$

$$\begin{cases} d\tilde{W}_t^1 = dW_t^1 - \sigma_{21}t \\ d\tilde{W}_t^2 = dW_t^2 - \sigma_{22}t \end{cases},$$

on a

$$\begin{aligned} X_T^1 &= X_t^1 e^{\sigma_{11}(W_T^1 - W_t^1) + \sigma_{12}(W_T^2 - W_t^2) - \frac{1}{2}(\sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2)(T-t)} \\ &= X_t^1 e^{(\sigma_{11}\sigma_{21} + \sigma_{12}\sigma_{22} - \frac{1}{2}\sigma_{11}^2 - \frac{1}{2}\sigma_{12}^2)(T-t)} e^{\sigma_{11}(\tilde{W}_T^1 - \tilde{W}_t^1) + \sigma_{12}(\tilde{W}_T^2 - \tilde{W}_t^2)} \\ X_T^2 &= X_t^2 e^{\frac{1}{2}(\sigma_{21}^2 + \sigma_{22}^2)(T-t)} e^{\sigma_{21}(\tilde{W}_T^1 - \tilde{W}_t^1) + \sigma_{22}(\tilde{W}_T^2 - \tilde{W}_t^2)} \end{aligned}$$

alors

$$\frac{X_T^1}{X_T^2} = \frac{X_t^1}{X_t^2} e^{-\frac{1}{2}((\sigma_{11} - \sigma_{21})^2 + (\sigma_{12} - \sigma_{22})^2) + (\sigma_{11} - \sigma_{21})(\tilde{W}_T^1 - \tilde{W}_t^1) + (\sigma_{12} - \sigma_{22})(\tilde{W}_T^2 - \tilde{W}_t^2)}$$

Notons

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}^2 &= (\sigma_{11} - \sigma_{21})^2 + (\sigma_{12} - \sigma_{22})^2 \\ d_1 &= \frac{\log \frac{x_1}{x_2 S} - \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 (T - t)}{(\sqrt{\bar{\sigma}^2 (T - t)})} \\ d_2 &= \frac{\log \frac{x_1}{x_2 S} + \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 (T - t)}{(\sqrt{\bar{\sigma}^2 (T - t)})}\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}F(t, x) &= x_2 \left(\frac{x_1}{x_2} N(d_1) - x_2 S N(d_2) \right) \\ &= x_1 N(d_1) - x_2 S N(d_2)\end{aligned}$$

Les couvertures est

$$\begin{aligned}H_t^1 &= \frac{\partial F}{\partial x_1} = N(d_1), \\ H_t^2 &= \frac{\partial F}{\partial x_2} = -S N(d_2)\end{aligned}$$

En plus on peut calculer les dérivées

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_t^1}{\partial x_1} &= \frac{e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial d_1}{\partial x_1} \\ &= \frac{e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{x_1 \sqrt{2\pi \bar{\sigma}^2 (T - t)}}\end{aligned}$$

de même,

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_t^1}{\partial x_2} &= -\frac{e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{x_2 \sqrt{2\pi \bar{\sigma}^2 (T - t)}} \\ \frac{\partial H_t^2}{\partial x_1} &= -S \frac{e^{-\frac{d_2^2}{2}}}{x_1 \sqrt{2\pi \bar{\sigma}^2 (T - t)}} \\ \frac{\partial H_t^2}{\partial x_2} &= S \frac{e^{-\frac{d_2^2}{2}}}{x_2 \sqrt{2\pi \bar{\sigma}^2 (T - t)}}\end{aligned}$$

donc les termes dans (3.5)

$$\begin{aligned}\mathbf{E} X_t^i X_t^j X_t^m X_t^n \frac{\partial^2 F_t}{\partial x_j \partial x_m} \frac{\partial^2 F_t}{\partial x_n \partial x_i} &= \mathbf{E} X_t^i X_t^j X_t^m X_t^n \frac{e^{-\frac{d_j^2 + d_n^2}{2}}}{X_t^m X_t^i} c(t) \\ &= c(t) \mathbf{E} X_t^j X_t^n e^{-\frac{d_j^2 + d_n^2}{2}} \\ &= c(t) \mathbf{E} e^{\log X_t^j + \log X_t^n - \frac{d_j^2 + d_n^2}{2}},\end{aligned}$$

donc cela se calcule explicitement.

Alors si on fait une couverture approchée à temps fixe, le corollaire 3.3.3, et le coefficient (3.4), i.e. (3.5) est calculée explicitement.

Maintenant on n'utilise que X^1 pour faire la couverture approchée, en temps fixé aux moments $t_n = T/n, n = 1..N$, et la matrice P dans (3.19) est $P = (1, 0)$, alors par proposition 3.4.2, si on note R le risque résiduel intrinsèque et R_ε le risque résiduel total, alors

$$|\sqrt{R_\varepsilon} - \sqrt{R}| \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \mathbf{E} \left(\int_0^T e^{-2rt} \|\sigma_t^* I_{X_t}^* P^* J_t^{\bar{K}} I_{X_t} \sigma_t\|_2^2 dt \right) \right)^{\frac{1}{2}} + o(\varepsilon^{\frac{1}{2}}),$$

puisque $\|A\|$ est égale à la trace de matrice AA^* , on a

$$\begin{aligned} & |\sqrt{R_\varepsilon} - \sqrt{R}| \\ & \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \mathbf{E} \left(\int_0^T e^{-2rt} tr(\sigma_t^* I_{X_t}^* P^* J_t^{\bar{K}} I_{X_t} \sigma_t \sigma_t^* I_{X_t}^* (J_t^{\bar{K}})^* P I_{X_t} \sigma_t) dt \right) \right)^{\frac{1}{2}} + o(\varepsilon^{\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

et comme $tr(AB) = tr(BA)$, on a en plus

$$\begin{aligned} & |\sqrt{R_\varepsilon} - \sqrt{R}| \\ & \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \mathbf{E} \left(\int_0^T e^{-2rt} tr(P I_{X_t} \sigma_t \sigma_t^* I_{X_t}^* P^* J_t^{\bar{K}} I_{X_t} \sigma_t \sigma_t^* I_{X_t}^* (J_t^{\bar{K}})^*) dt \right) \right)^{\frac{1}{2}} + o(\varepsilon^{\frac{1}{2}}) \\ & = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \mathbf{E} \left(\int_0^T e^{-2rt} P I_{X_t} \sigma_t \sigma_t^* I_{X_t}^* P^* J_t^{\bar{K}} I_{X_t} \sigma_t \sigma_t^* I_{X_t}^* (J_t^{\bar{K}})^* dt \right) \right)^{\frac{1}{2}} + o(\varepsilon^{\frac{1}{2}}) \quad (3.23) \end{aligned}$$

Ici, la meilleure couverture avec la seule X^1 est

$$\bar{K}_t = (G_t G_t^*)^{-1} G_t \sigma_t^* I_{\tilde{X}_t} H_t$$

où

$$G_t = e^{-rt} P I_{X_t} \sigma_t,$$

donc

$$\begin{aligned} (G_t G_t^*)^{-1} &= (e^{-2rt} P I_{X_t} \sigma_t \sigma_t^* I_{X_t})^{-1} \\ &= e^{2rt} a_{11}^{-1} (X_t^1)^{-2}, \end{aligned}$$

où $a_{11} = (\sigma \sigma^*)_{11}$. Donc \bar{K}_t se calcule par

$$\begin{aligned} \bar{K}_t &= e^{2rt} a_{11}^{-1} (X_t^1)^{-2} G_t \sigma_t^* I_{\tilde{X}_t} H_t \\ &= e^{2rt} a_{11}^{-1} (X_t^1)^{-2} e^{-rt} P I_{X_t} \sigma_t \sigma_t^* I_{\tilde{X}_t} H_t \\ &= \left(1 \frac{a_{12} X_t^2}{a_{11} X_t^1} \right) H_t \\ &= H_t^1 + \frac{a_{12} X_t^2}{a_{11} X_t^1} H_t^2. \end{aligned}$$

Alors $J_t^{\overline{K}}$ le jacobien de \overline{K}_t est

$$\begin{aligned} J_t^{\overline{K}} &= \left(\frac{\partial \overline{K}_t}{\partial x_1}, \frac{\partial \overline{K}_t}{\partial x_2} \right) \\ &= \left(\frac{\partial H_t^1}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{a_{12}X_t^2}{a_{11}X_t^1} H_t^2 \right), \frac{\partial H_t^1}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{a_{12}X_t^2}{a_{11}X_t^1} H_t^2 \right) \right). \end{aligned}$$

On voit que dans $J_t^{\overline{K}}$, il reste le terme H_t^1 et H_t^2 , donc le calcul de coefficient dans (3.23), il n'y pas de formule fermée.

Bibliographie

- [Ada75] R.A.Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.
- [AP] M. Avellaneda and A. Parás, *Optimal hedging portfolios for derivative securities in the presence of large transaction costs*, preprint.
- [Bac00] L. Bachelier. Théorie de la spéculation. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 17:21–86, 1900.
- [BLPS92] B. Bensaid, J.P. Lesne, H. Pagès, and J. Scheinkman. Derivative asset pricing with transaction costs. *Mathematical Finance*, 2:63–86, 1992.
- [BLPS92] B. Bensaid, J.-P. Lesne, H. Pagès and J. Scheinkman, *Derivative asset pricing with transaction costs*, *Mathematical Finance*, 2(1992)
- [BL89] N. Bouleau et D. Lamberton. Residual risks and hedging strategies in markovian markets. *Stoch. Proc. and Appl.*, 33:131–150, 1989.
- [BE] P.P. Boyle and d. Emmanuel, *Discretely adjusted option hedges*, *Journal of Financial Economics*, 8(1980)
- [BV92] P.P. Boyle and T. Vorst. Option replication in discrete time with transaction costs. *Journal of finance*, 47:271–293, 1992.
- [BV92] P.P. Boyle and T. Vorst, *Option replication with in discrete time with transaction costs*, *Journal of Finance*, 47(1992)
- [BS73] F. Black et M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81:635–654, 1973.
- [BS96] G. Barles and H.M. Soner. Option pricing with transaction costs and a non-linear Black-Scholes equation. *preprint*, 1996.
- [Con] G.M. Constantinides, *Option Pricing with transaction costs*, working paper, University of Chicago
- [CRR79] J.C. Cox , S. Ross and M. Rubinstein, *Option pricing: A simplified approach*, *Journal of Financial Economics*, 7 (1979)
- [DC94] M.H.A. Davis and J.M.C. Clark, *A note on super-replication strategies*, *Phil. Trans. Royal Soc. London A* 347(1994)
- [DN90] M.H.A. Davis and A. Norman, *Portfolio selection with transaction costs*, *Math. Operations Research* 15 (1990)
- [DR] D. Duffie and H. Richardson, *Mean-variance hedging in continuous time*, *The Annals of Applied Probability*

- [ENU] , C. Edirisinghe, V. Naik and R. Uppal, *Optimal replication of options with transaction costs and trading restrictions*, Preprint.
- [FR86] K.R. French, R. Roll, *Stock return variances: the arrival of information and the reaction of traders*, Journal of Financial Economics 17 (1986)
- [Fig89] S. Figlewski, *Option Arbitrage in imperfect markets*, Journal of Finance, 44 (1989)
- [Fri64] A.Friedman, *Partial differential equations of Parabolic Type*. Academic Press, 1964.
- [Fri76] A.Friedman, *Stochastic differential equation and Application*. Academic Press, 1976.
- [FS] H. Föllmer, D. Sondermann, *Hedging of Non-Redundant Contingent Claims*
- [HK79] M.J. Harrison et D.M. Kreps. Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *J. of Economic Theory*, 29:381–408, 1979.
- [HP81] M.J. Harrison et S.R. Pliska. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic Processes and their Applications*, 11:215–260, 1981.
- [HP83] M.J. Harrison et S.R. Pliska. A stochastic calculus model of continuous trading: complete markets. *Stochastic Processes and their Applications*, 15:313–316, 1983.
- [Hen] P.Henrotte, *Transaction costs and duplication Strategies* . Thesis of University of Stanford.
- [IW89] N.Ikeda and S.Watanabe, *Stochastic differential equations and diffusion processes*. North-Holland/Kodansha, 1989.
- [HC89] S.D. Hodges, and L.J. Clewlow, *Optimal delta hedging under transaction costs*, Review of Futures Markets, 8(1989)
- [HN89] S.D. Hodges, and A. Neuberger, *Optimal replication of contingent claims under transaction costs*, Review of Futures Markets, 8(1989)
- [KS81] I.Karatzas and S.E.Shreve, *Brownien Motion and Stochastic Calculus*. Springer-Verlag, New York, 1981.
- [LL92a] D.Lamberton and B.Lapeyre, *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*. Ellipses-Edition Marketing , 1992.
- [LL92b] D.Lamberton and B.Lapeyre, *Hedging index option with few assets*.
- [Lel85] R.E. Leland. Option pricing with transaction costs. *The Journal of finance*, 11:1283–1301, 1985.
- [Mer73] R.C. Merton. Theory of rational option pricing. *Bell J. of Econom. and Management Sci.*, 4:141–183, 1973.
- [MT95] F. Mercurio and Vorst T.C.F. Option pricing and hedging in discrete time with transaction costs and incomplete markets. *Preprint*, 1995.
- [Pro] P. Protter, *Stochastic integration and differential equations*, Springer-Verlag, New York.

- [RY90] A. Revuz et M. Yor. *Continuous Martingale Calculus*. Springer-Verlag, 1990.
- [Rum] An optimum rebalancing schedule for delta hedging, preprint.
- [Scha94] M. Schäl, *On quadratic cost criteria for option hedging*, Mathematics of Operations Research, Vol. 19, No. 1, February 1994
- [Schw92] M. Schweizer. Mean-variance hedging for general claims. *Annals of Applied Probability*, 2:171–179, 1992.
- [Schw92] M. Schweizer, *Mean-Variance Hedging for general claims*, The Annals of Applied Probability, 1992, Vol 2, No.1
- [Schw94] M. Schweizer, *Approximating random variables by stochastic integrals*, The Annals of Applied Probability, 1994, Vol 22, No. 3
- [SSC95] S.E. Shreve, H.M. Soner, and J. Cvitanic. There is no nontrivial hedging portfolio for option pricing with transaction costs. *Ann. Appl. Prob.*, 5:327–355, 1995.
- [Tof96] K.B. Toft, *On the mean-variance tradeoff in option replication with transaction costs*, The Journal of Financial and quantitative analysis, vol 31, No 2, June 1996
- [Wha95] P. Whaley, AE. and Willmott. Optimal hedging of options with small but arbitrary transaction costs. *Preprint*, 1995.